
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01015450 8

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS DE LIGNES

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS DE LIGNES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1912

PAR

VITO VOLTERRA,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE ROME,
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

Par Joseph PÉRÈS,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

PRÉFACE.

J'ai eu le grand honneur de professer ces Leçons à la Sorbonne, de janvier à mars 1912, en qualité de professeur agréé à l'Université de Paris (fondation Albert Kahn). J'exprime à M. le Vice-Recteur, à M. le Doyen de la Faculté des Sciences et aux membres du Conseil de l'Université de Paris toute ma reconnaissance pour la flatteuse invitation qu'ils ont bien voulu me faire d'exposer les résultats de mes recherches.

Ces Leçons ont été recueillies avec le plus grand soin par un jeune géomètre de beaucoup de mérite, M. Joseph Pérès. Dans la rédaction et dans la correction des épreuves, il a montré une intelligence et un zèle dont je lui exprime mes plus vifs remercîments.

Je suis heureux de faire paraître ces Leçons dans la *Collection de monographies sur la Théorie des fonctions*, dirigée par M. Émile Borel. Ce nouveau Volume complète celui qui a paru il y a quelques mois dans la même collection sous le titre : *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*.

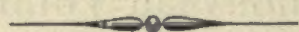
Je vois avec le plus grand plaisir que les théories exposées dans le présent Ouvrage sont en train de se développer. De nouveaux travaux ont paru pendant son impression, d'autres vont paraître qui s'y rattachent. J'aurais désiré les exposer ou les citer tous. Mais je n'ai pas pu le faire, soit pour ne pas

altérer le plan de mon cours, soit parce que je n'en ai eu connaissance que trop tard. C'est ainsi que je regrette de n'avoir pas pu m'occuper des récents et beaux travaux de M. Paul Lévy sur les équations aux dérivées fonctionnelles, ni des intéressantes recherches de M. Fréchet sur les fondements de la théorie des fonctions de lignes et sur quelques formes nouvelles de leurs développements en série, ni d'autres travaux encore.

Je n'ai pas séparé dans cet Ouvrage la partie d'analyse pure de celle des applications. Il aurait été plus systématique de les exposer l'une après l'autre, mais de cette manière je n'aurais pas suivi la marche de mes pensées et je me serais éloigné de l'esprit de mes travaux. J'ai dû laisser de côté les applications des fonctions de lignes et d'hyperespaces aux intégrales des fonctions de plusieurs variables et à l'extension des fonctions conjuguées, car dans le plan de mes recherches elles forment des branches distinctes de celles dont on trouvera un aperçu d'ensemble dans ces Leçons.

Rome, juillet 1913.

VITO VOLTERRA.



LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS DE LIGNES

CHAPITRE I.

L'ÉVOLUTION DES IDÉES FONDAMENTALES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

1. Les méthodes infinitésimales. — 2. Eudoxe de Cnide et Archimède. — 3. Galilée, Kepler, Cavalieri, Descartes, Fermat, Torricelli, Pascal, Wallis. — 4. Huygens, Neper, Mercator, Roberval, Barrow, Newton, Leibniz. — 5. Extension des opérations du calcul infinitésimal. — 6. Calcul différentiel et intégral des substitutions. — 7. Concept de fonction. — 8. Passage du fini à l'infini dans le concept de fonction. — 9. Problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne. — 10. Différents types d'évolution et différentes sortes d'analyses.

---

1. Avant d'aborder l'exposé des méthodes d'analyse et le développement des questions de détail se rapportant au sujet que je vais traiter, je consacrerai ce Chapitre à donner un aperçu du sujet en général, en le reliant à des principes très connus en Mathématiques et à des questions qui se posent dans la Philosophie naturelle. Ainsi on pourra mettre à leur place naturelle des méthodes qui se sont développées dans ces dernières années et montrer leur situation dans l'histoire générale des idées mathématiques. Peut-être pourra-t-on aussi juger de leur avenir.

Je commencerai par remarquer l'existence d'un sentiment que tous les géomètres éprouvent, bien qu'ils ne s'en rendent pas compte à tout instant. C'est au moment où l'on craint de perdre un objet qu'on l'aime et l'apprécie à sa juste valeur. Dans une Note récente, M. Poincaré, en étudiant la question des *quanta*, montre qu'il n'est pas possible de se passer de l'hypothèse que

l'énergie varie par sauts brusques et il s'écrie : « Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles ? ([1]) »

Cette exclamation, qui renferme un très vif sentiment de regret, exprime bien l'état d'âme de tout mathématicien qui pourrait soupçonner que cet admirable outil, le calcul infinitésimal, doit être abandonné dans l'étude d'un phénomène quelconque. C'est en effet l'idée du continu qui a dominé les spéculations mathématiques et leurs applications les plus intéressantes et les plus fécondes depuis les époques les plus reculées jusqu'à nos jours. Lorsque les conditions des problèmes l'ont permis, on a toujours ramené d'une manière toute naturelle, parfois intuitive et inconsciente, les cas de discontinuité à des cas de continuité par des procédés qu'on peut, en général, appeler de nature *statistique*. La puissance des méthodes des infiniment petits a eu le dessus dans la pratique des calculs sur les conceptions et les hypothèses plus probables se rapportant à la nature même du sujet. D'autre part, on a reconnu que si l'on voulait rendre rigoureuses les considérations relatives aux méthodes infinitésimales, il fallait considérer d'abord des cas de discontinuité et arriver après au continu par des passages à la limite. On peut ajouter que la source des plus importantes propriétés du calcul infinitésimal a été le transport dans le domaine de ce calcul des propriétés connues de l'Algèbre finie et de l'Arithmétique. Il y a eu donc action réciproque. Les cas de discontinuité ont été étudiés par des méthodes infinitésimales et en même temps toute question infinitésimale a été envisagée comme un cas limite d'une question touchant le discontinu. Il n'est pas nécessaire de multiplier les exemples pour démontrer ce que nous venons de dire. La Physique mathématique en donne les preuves les plus éloquentes. En effet, les théories atomiques n'ont pas empêché, en général, l'application du calcul infinitésimal. Fourier dans la théorie de la chaleur, ainsi que Cauchy, Poisson, dans l'élasticité, et tous les mathématiciens classiques, partirent de l'hypothèse de la discontinuité de la matière, mais résolurent les problèmes qu'ils se posaient à

([1]) *Comptes rendus*, t. 153, p. 1103.

l'aide des équations différentielles et leurs intégrales. Dans leurs applications les plus récentes, l'économie politique et la statistique ont suivi le même chemin.

2. L'emploi des infiniment petits est peut-être aussi ancien que les premiers essais méthodiques de la Géométrie [1]. Eudoxe de Cnide qui vivait au quatrième siècle avant Jésus-Christ connaissait déjà l'usage des méthodes infinitésimales. Il les a employées à propos du théorème suivant lequel les pyramides ayant même hauteur et les bases équivalentes ont même volume. Il n'est pas possible, comme M. Dehn l'a reconnu tout récemment [2], de démontrer cette proposition par des méthodes de décomposition du volume en un nombre fini de parties, c'est-à-dire d'une manière semblable à celle qu'on emploie pour les aires. Eudoxe, ou peut-être même quelqu'un avant lui, comprit qu'il fallait recourir à la décomposition du volume en un nombre infini de couches infiniment minces. Voilà le premier exemple que l'on connaisse des méthodes infinitésimales. Euclide l'expose dans la septième proposition du douzième Livre, mais il fait usage de la méthode d'exhaustion. Il ramène le cas du continu au cas d'une somme d'un nombre fini de termes et l'on voit ainsi paraître le premier germe des méthodes modernes du calcul intégral et du principe de Dedekind qui a été, bien des siècles après, formulé d'une manière complète et abstraite.

Il faut attribuer à Archimède l'application systématique des méthodes infinitésimales. Il y a peu d'années, grâce à la célèbre découverte de M. Heiberg, on a pu pénétrer dans la pensée intime du géomètre de Syracuse [3]. Dans la lettre qu'il a écrite à Erathostène, on voit qu'il faisait usage pour ses découvertes de la méthode des infiniment petits. Ce n'est que pour les exposer au public qu'il recourait à la méthode d'exhaustion et à celle des séries. Il suffit de se souvenir des différentes

---

(1) Je remercie M. Vacca, professeur de l'Université de Rome, des Notices historiques qu'il a bien voulu me communiquer.

(2) Dehn, *Ueber den Rauminhalt* (*Math. Ann.*, t. LV, p. 465).

(3) *Voir* l'intéressante publication de MM. Painlevé et Reinach : *Un Traité de Géométrie inédit d'Archimède* (*Revue générale des Sciences*, t. XVIII, 1907). — Archimedis, *Opera omnia*, Ed. Heiberg, vol. II, p. 427. Lipsiæ, 1913.

méthodes qu'il a données pour trouver l'aire de la parabole, pour voir en action tous les principes fondamentaux par lesquels le calcul infinitésimal s'est développé depuis cette époque reculée jusqu'à nos jours. La plus élégante et la plus suggestive de ses solutions est celle qu'on obtient en montrant qu'un segment de parabole et un triangle rectangle isoscèle, ayant même base que le segment et une hauteur double, disposés à côté l'un de l'autre sur les bras d'un levier dont le point d'appui est au milieu, sont en équilibre, car chaque couple symétrique d'ordonnées de la parabole a le même moment que le couple correspondant du triangle [1]. Il n'est pas nécessaire de rappeler les différents résultats auxquels Archimède a été conduit par l'application de ses méthodes. En les classant, comme nous l'avons indiqué tout à l'heure en trois groupes, celle des infiniment petits, celle de l'exhaustion et enfin celle des séries, on voit paraître toutes les conceptions fondamentales du type infinitésimal.

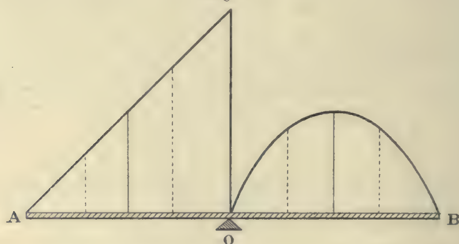
Les dernières méthodes se rattachent évidemment à la théorie des limites qu'on retrouve dans les développements successifs du calcul infinitésimal.

3. Mais les pensées d'Archimède étaient trop profondes pour être facilement comprises. La semence qu'il a jetée dans le terrain a mis des siècles à germer. Ses continuateurs et ses premiers commentateurs n'ont pas pénétré dans ses concep-

---

(1) Il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure ci-dessous, où l'on a marqué en

Fig. 1.



pointillé les couples d'ordonnées ayant le même moment par rapport au point d'appui O du levier AB, pour comprendre la démonstration.

tions. Les Arabes ont trouvé plus facile et plus aisé de développer la théorie des coniques où il n'y avait pas de si grandes difficultés.

Ce n'est que pendant la Renaissance qu'on commence à se rendre compte de la vraie grandeur d'Archimède. Tartaglia (1) reproduit quelques parties de l'œuvre du grand géomètre sans peut-être s'approprier encore ses méthodes infinitésimales. Maurolico (2) et Commandino (3) montrent une connaissance plus profonde de ses méthodes, car ils ne se limitent pas à reproduire ses démonstrations, mais ils retrouvent aussi des résultats sur les centres de gravité qu'Archimède avait découvert et qu'on avait perdu.

Mais les vrais continuateurs et les premiers élèves d'Archimède, ceux qui ont hérité de son esprit, sont Galilée et Képler. Pour étudier les problèmes de la dynamique avec succès, il a fallu employer les méthodes infinitésimales et en effet, la question la plus simple, celle de la chute des graves, a été résolue par Galilée en décomposant le temps de la chute en petits intervalles et en envisageant dans chaque intervalle le mouvement comme uniforme (4).

Le passage des méthodes infinitésimales de la Géométrie à la Mécanique marque une date mémorable et montre toute la portée de ces méthodes.

Képler a poussé les quadratures au delà de celles faites par Archimède. C'est ainsi qu'il réussit à calculer des volumes de solides de révolution et à intégrer des fonctions trigonométriques (5).

Cavalieri, par sa Géométrie des indivisibles (6), a systématisé le

(1) Tartaglia, *La terza parte del general trattato dei numeri et misure*, Liv. III, Venetia, 1560. — *Opera Archimedis Syracusani*, Venetiis, 1543.

(2) Maurolico, *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica, quæ extant*, etc., p. 177, Panormi, 1685 (cette œuvre a été écrite en 1548 et n'a été publiée qu'après la mort de l'auteur).

(3) Commandino, *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiæ, 1565 (feuille 42, r.).

(4) Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida, 1638, p. 171 et suiv. (*Edizione nazionale*, vol. VIII, Firenze, 1898).

(5) Képler, *Nova stereometria doliorum Vinariorum*, Lincii, 1615 (*Opera omnia*, vol. IV. — *De motibus stellæ Martis*, Pragæ, 1609 (*Opera omnia*, vol. III, p. 390).

(6) Cavalieri, *Geometria Indivisibilibus continuorum*, Bononiæ, 1635; *Exercitationes geometricæ Sex*, Bononiæ, 1647.

procédé des infiniment petits et il a donné la clef pour faire les quadratures les plus simples.

Descartes, Fermat, Torricelli considèrent de nouveaux cas. Pascal et Fermat donnent de la rigueur et un nouveau développement à tout un vaste ensemble de recherches, en retournant à la méthode de l'exhaustion dont on s'était éloigné.

Bien qu'il soit moins rigoureux que son contemporain Pascal et ne réussisse pas dans le célèbre concours sur la roulette, Wallis ne cesse pas d'apporter des contributions nouvelles au calcul infinitésimal, soit en étudiant les intégrales, qu'on appelle maintenant les *intégrales eulériennes*, soit par l'étude des produits infinis et des séries ([1]).

4. Nous voyons donc qu'après une période de 17 siècles où les idées fécondes du calcul infinitésimal sont restées cachées et comme endormies, elles se réveillent, surgissent tout à coup et prennent par un élan soudain le plus grand développement. En 2 siècles à peu près, elles ont dépassé énormément leurs limites primitives et, ce qui est plus important, elles sont sorties de la Géométrie et ont créé, par leur pénétration dans la Philosophie naturelle, la Science moderne.

On doit à Huygens la continuation de l'œuvre de Galilée par l'étude infinitésimale des problèmes de la Dynamique. Les questions de la chaînette, de la tautochrone, et l'étude des lois fondamentales de la Mécanique représentent des progrès toujours croissants dans l'emploi des méthodes des infiniment petits.

En même temps, l'Analyse pure se développe par l'introduction des logarithmes, faite par Neper, par l'intégration par série qui donne à Mercator la série logarithmique et, en se plaçant au point de vue géométrique, Barrow découvre et exprime les procédés d'intégration par parties et par substitution.

C'est l'évolution de ce qu'on appelle le *calcul intégral* que nous avons suivie jusqu'ici. Le calcul différentiel part du problème des tangentes. Les anciens avaient étudié les tangentes aux spirales et aux coniques, mais c'est Descartes qui a conçu

---

([3]) WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, Oxonii, 1655.

la tangente comme la limite d'une sécante (1). Torricelli et Roberval ont obtenu les tangentes par la composition des mouvements et Fermat envisageait déjà ce qu'on appelle le *rapport incrémental* (2).

A l'époque de Barrow, on avait une méthode générale et tout était mûr pour que les opérations de différentiation et d'intégration, considérées comme les opérations inverses l'une de l'autre, devinssent les bases fondamentales d'une nouvelle science qui permît de résoudre systématiquement les problèmes de Géométrie et de Mécanique.

C'est ainsi que le calcul différentiel et intégral a été créé. Newton le constitue en système et commence à intégrer des équations différentielles pour approfondir les problèmes qui se présentent dans l'application de sa loi à la Mécanique céleste (3).

Leibniz donne au nouveau calcul les notations qu'on emploie encore (4).

Comme nous l'avons vu, c'est le continu considéré en soi-même ou regardé comme une limite qui forme la conception fondamentale de tout l'ensemble de ces recherches. D'autre part, l'intégration n'est que le transport de la conception de somme du domaine fini au domaine infini et la dérivation n'est que son opération inverse. Elles sont les bases du calcul infinitésimal.

5. Arrivés à ce point on peut se demander : Est-ce que ces opérations sont les seules où ce passage est applicable ? Il est facile de concevoir que le passage du fini à l'infini peut s'appliquer, non seulement à la somme, mais à bien d'autres opérations. Et l'on peut y arriver, soit moyennant le procédé qu'on appelle *des séries*, soit par le procédé que nous pouvons comparer à celui du calcul intégral où l'on envisage, d'une manière

---

(1) Descartes, *La Géométrie*, 1637, trad. latine de Schooten, Amstelædami, 1659, p. 43.

(2) Fermat, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (*Œuvres de Fermat*, t. I, p. 133, et t. III, p. 121. Paris, 1891-96).

(3) Isaaci Newton, *Epistola prior*, 13 Junii 1676. *Epistola posterior*, 24 octob. 1676 (Opuscula, Lausannæ et Genevæ, 1744, t. I).

(4) Leibniz, *Nova methodus*, etc. *Acta eruditorum*, Lipsiæ, 1684.

analogue à ce que faisait Galilée pour étudier la chute des graves, la variation totale d'une quantité comme l'ensemble des variations infiniment petites qui se suivent, obtenues en divisant cette variation totale en intervalles partiels.

C'est ainsi que pour calculer l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire dans un certain domaine, on peut faire d'abord des opérations algébriques dans des intervalles partiels. En faisant après diminuer infiniment tous ces intervalles et croître indéfiniment leur nombre, on trouve à la limite l'intégrale. C'est la méthode de Cauchy qu'on emploie ordinairement pour démontrer l'existence des intégrales à côté des méthodes des séries ou de la méthode de Picard des approximations successives (¹).

Le principe de la méthode de Cauchy peut s'appliquer d'une infinité de manières pour ramener un problème complexe à des problèmes plus simples déjà résolus.

Pour en donner un exemple, examinons le problème des trois corps et, pour simplifier, supposons que la masse du troisième corps C soit négligeable par rapport à celles des deux corps A et B, de sorte que leur mouvement suive la loi de Képler. Il n'y aura que le mouvement du troisième corps C qui sera inconnu. Mais dans un petit intervalle de temps on peut négliger les déplacements des deux corps A et B et, par suite, on peut envisager le mouvement de C comme celui d'un corps attiré par deux points fixes. Ce mouvement est connu. Legendre en a donné une solution très détaillée. En décomposant un intervalle donné de temps en intervalles partiels, on pourra décomposer le mouvement de C, d'abord approximativement, en mouvements successifs connus. A la limite, en faisant diminuer indéfiniment ces intervalles, on aura le mouvement de C dans tout l'intervalle donné.

Mais on pourra aussi supposer approximativement que dans

(¹) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, Paris, t. I, 1840, p. 327.

LIPSCHITZ, *Disamina della possibilità di integraré completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. II, 1868-1869, p. 288). — VOLTERRA, *Sui principii del calcolo integrale* (*Giornale di Matematiche*, vol. XIX, 1881).

chaque intervalle partiel de temps la force qui agit sur C est constante et que son mouvement est, par conséquent, parabolique. Le mouvement de C sera alors considéré comme une suite infinie de mouvements paraboliques successifs et infiniment petits. Enfin, on pourra aussi regarder le mouvement de C comme uniforme dans chaque intervalle partiel de temps, en calculant de proche en proche la variation de sa vitesse. Le mouvement de C sera alors obtenu comme une succession d'un nombre infini de mouvements rectilignes uniformes.

6. Revenons au passage du fini à l'infini dans son application la plus générale aux opérations. Nous avons déjà dit un mot des produits infinis, en touchant à l'œuvre de Wallis. Le produit infini est obtenu par le transport de l'idée de série du cas de la somme à celui du produit. De même, on peut transporter l'idée d'intégration, dont nous avons parlé, du domaine de la somme à celui du produit. On obtient ainsi l'intégration logarithmique.

Mais nous pouvons porter notre attention sur des types plus généraux d'opérations qui comprennent la somme et la multiplication. Considérons la déformation d'une figure, par exemple d'une figure plane. La déformation la plus simple qu'on puisse imaginer est une dilatation, qu'on peut envisager comme une multiplication des dimensions de la figure, ou une contraction. La résultante de plusieurs déformations de ce genre s'obtient par une multiplication des paramètres qui définissent chaque déformation.

Considérons maintenant la transformation linéaire la plus générale. Au point de vue analytique, elle est définie par une substitution linéaire appliquée aux coordonnées. Exécuter successivement plusieurs substitutions linéaires, c'est-à-dire plusieurs transformations linéaires de la figure, revient à effectuer ce qu'on appelle la *multiplication des substitutions*.

Comme nous venons de le voir, la multiplication ordinaire n'en est qu'un cas particulier. On peut montrer que la somme ordinaire rentre aussi comme cas particulier dans la multiplication des substitutions. Multiplions maintenant une suite infinie de substitutions linéaires, dont chacune correspond à une transformation géométrique infiniment petite. Ce passage du fini à l'infini

est tout à fait analogue à celui qu'on fait lorsqu'on passe de la somme d'un nombre fini de termes à une intégration, et il est évident que l'opération ordinaire d'intégration n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons de définir.

Or, cette suite infinie de transformations infiniment petites correspond à une transformation finie et l'opération ainsi définie, peut s'appeler l'*intégration des substitutions linéaires*. L'opération inverse sera une dérivation des substitutions et l'on aura un calcul intégral et différentiel des substitutions tout à fait parallèle au calcul intégral et différentiel ordinaire.

Ce calcul correspond à ce qu'on appelle en analyse l'*intégration des équations différentielles linéaires*. Toute cette théorie peut donc s'exposer à ce nouveau point de vue et bien des résultats se coordonnent ainsi dans la partie plus élémentaire comme dans la partie plus élevée. Par cette voie, les théorèmes des résidus de Cauchy amènent tout naturellement aux théorèmes de Fuchs, et c'est-ainsi que la théorie algébrique des diviseurs élémentaires, et la théorie géométrique de l'homographie se rattachent à la théorie des équations différentielles linéaires par un lien analytique qui conduit à de nouvelles propositions (¹).

7. Mais les considérations relatives au passage du fini à l'infini, du discontinu au continu, acquièrent un essor nouveau et une nouvelle extension, dès que nous les transportons dans le domaine de la théorie des fonctions, tout en gardant leurs caractères et tout en partant de la même conception primitive et fondamentale.

Avant d'aborder ce point, qui est le plus délicat que je dois traiter, je vais dire quelques mots sur l'idée générale de fonction.

Les concepts de fonctions et de lois physiques sont nés en même temps. D'un autre côté, l'idée d'une dépendance analy-

(¹) *Cf.* Chapitre II, nᵒˢ 9 à 11. Cette théorie est développée dans les Mémoires suivants :

VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali lineari* (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 15 mai 1887). *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* (*Rend. del Circolo M. di Palermo*, t. II, 1888). *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* [*Memorie della Società Italiana delle Scienze* (detta dei XL) : 1ʳᵉ *Partie*, 3ᵉ série, vol. VI, 1887; 2ᵉ *Partie*, 3ᵉ série, vol. XII, 1899]. *Cf.* L. SCHLESINGER, *Vorlasungen über lineare Differentialgleichungen*. Leipzig, 1908.

tique entre des quantités variables est sortie tout naturellement du développement de l'Algèbre. Cependant, cette idée ne se serait pas formée complètement si elle n'avait eu le soutien d'une représentation qui parlât aux yeux d'une manière concrète et intuitive. Cette représentation est le fruit de la création de la Géométrie analytique. Lorsque l'étude d'une courbe a été ramenée par Descartes à celle de la variation simultanée de ses coordonnées, la théorie des fonctions a été constituée et son étude est devenue une nécessité pour le développement de la Science.

Or, comme il arrive bien souvent, les conceptions fondamentales existaient déjà d'une manière cachée. Bien des cas particuliers étaient déjà étudiés presque complètement, avant que le mot de *fonction* ne fût encore prononcé par Leibniz (¹) et avant même qu'on pensât à considérer, d'une manière systématique et générale, la dépendance entre les quantités qui varient simultanément et à créer un corps de science de cet ensemble de notions qui poussaient de tous côtés. Le moment où elles se réunirent et où, par leur coordination naquit une nouvelle branche des Mathématiques, est une date mémorable de l'histoire des Sciences.

J'ai parlé des différents éléments qui ont concouru à créer la théorie des fonctions. Ils ne se sont jamais complètement fondus et, même dans les Traités modernes, on peut très bien reconnaître les soudures entre ces éléments de nature hétérogène. C'est ainsi que la théorie des fonctions analytiques, celle des fonctions dans le sens de Dirichlet et le côté géométrique de la théorie des fonctions se développent, en général, par des méthodes différentes, quoiqu'on puisse établir des rapports continuels entre ces théories.

Le côté géométrique a prévalu d'abord. C'est pourquoi un mot spécial pour désigner la fonction n'était pas même nécessaire. Le langage géométrique, la conception plus ou moins vague de courbe et la connaissance de ses propriétés suffisaient.

Lagrange se plaça à un point de vue tout à fait opposé.

(¹) LEIBNIZ, *Werke* (Ed. Gerhardt), *Math. Schrift.*, vol. V, p. 307.

Nous avons déjà parlé des méthodes des infiniment petits et de celles des limites dont le calcul infinitésimal est sorti. Lagrange chercha, par un effort hardi, à dégager le calcul différentiel et intégral de ces notions par la théorie des fonctions analytiques, en le reliant directement à l'Algèbre ([1]). C'est donc l'essai de Lagrange qu'il faut prendre comme point de départ de la conception des fonctions analytiques, si l'on ne veut pas reculer jusqu'à la découverte primitive de Taylor de la série des puissances.

Comme dans toutes les branches du Calcul différentiel et intégral, ainsi dans la théorie des fonctions, les théories physiques et naturelles ont beaucoup contribué à élargir les concepts en fixant définitivement et d'une manière mathématique l'idée de loi physique et celle de cause et d'effet.

L'histoire de la représentation des fonctions arbitraires est très connue. On les a introduites dès qu'on a commencé à étudier les problèmes de la Physique mathématique où il fallait intégrer des équations aux dérivées partielles. D'Alembert, Euler Bernoulli et enfin Fourier ont établi les principes fondamentaux, mais le développement de la théorie se poursuit jusqu'à nos jours.

Il aurait été impossible pour les applications physiques de se borner aux fonctions d'une seule variable.

Newton a déjà vu l'intérêt qu'il y a à considérer des fonctions de plusieurs variables. Les forces et les éléments qui définissent les propriétés d'un champ physique dépendent de la position, le plus souvent de la position et du temps. Il est donc nécessaire d'envisager des fonctions de 3 et de 4 variables. En outre, regarde-t-on un phénomène comme une conséquence de plusieurs causes, les paramètres qui le définissent seront des fonctions des paramètres qui individualisent ces différentes causes. La Géométrie conduit aussi aux fonctions de plusieurs variables par la Géométrie analytique solide et l'étude des ensembles de courbes. Enfin, en Algèbre, lorsqu'on applique des opérations à plusieurs quantités, on a tout naturellement des fonctions de plusieurs variables. Leur théorie s'est développée

---

([1]) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, 1797.

parallèlement à celle des fonctions d'une seule variable, soit au point de vue analytique, soit sous les autres rapports.

8. Mais à ce point une idée bien naturelle surgit, une idée qui n'est autre chose que le transport de la conception fondamentale du calcul intégral au domaine de la théorie des fonctions, c'est-à-dire un passage du discontinu au continu tout à fait semblable à celui par lequel on passe de la somme à l'intégrale, et par lequel on arrive aux opérations plus générales d'intégration dont nous avons parlé (1).

Est-il possible de se borner dans la Philosophie naturelle aux fonctions d'un nombre fini de variables? Il est évident que si l'on regarde un phénomène comme l'effet d'un nombre fini de causes, on fait une abstraction, car on néglige des éléments qu'on considère comme très petits par rapport à d'autres éléments qui sont prépondérants. On ne fait ainsi qu'un examen approximatif du phénomène, mais on entrevoit facilement qu'il y aura des cas, où, pour approfondir d'une manière convenable la question, il sera nécessaire de passer du nombre fini au nombre infini d'éléments variables.

Un exemple se présente au premier abord en envisageant un champ physique. Comme nous venons de le dire, en variant la position et le temps, on trouve des fonctions de 4 variables; mais si l'on varie le champ même, regardé comme un continu, les changements des phénomènes dépendront d'une infinité de variables.

En outre, dans les phénomènes où la mémoire du passé se conserve, le présent dépendra de toute l'histoire et puisque le temps est continu, le présent dépendra d'une infinité d'éléments ou de variables qui sont celles qui individualisent les faits passés (2).

Leibniz conçut-il cette sorte d'hérédité? On ne peut pas le dire,

---

(1) J'ai introduit cette idée en 1887. Les premiers Mémoires sur ce sujet sont les suivants :

Sopra la funzioni che dipendono da altre funzioni, 3 Notes (*Rend. R. Accademia dei Lincei*, 2e sem. 1887).

(2) *Voir* VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità* (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 2e sem. 1909).

pourtant il expose dans sa monadologie quelques considérations qui peuvent s'y rattacher ([1]). Mais les expressions dont il fait usage sont tellement vagues qu'il est très difficile de saisir sa pensée. Elles se rapportent à l'espace ainsi qu'au temps. Son traducteur allemand ne réussit à reproduire son idée que par un mot : celui de Nachwirkung, dont les physiciens modernes ont fait un usage si large.

M. Picard a dit des paroles très profondes sur ce sujet en distinguant dans la Mécanique deux parties qu'il appelle : *la mécanique héréditaire* et *la mécanique non héréditaire* ([2]).

Nous consacrerons plusieurs Chapitres à cette étude ([3]), mais dès à présent, pour éclaicir ce concept, il suffit de rappeler les phénomènes bien connus d'élasticité étudiés par Boltzmann ([4]), dans lesquels on vérifie une sorte d'hérédité, laissée sur la forme d'un corps par toutes les actions qui l'ont sollicité. Dans ce cas, il est évident que la déformation actuelle dépend d'une infinité d'éléments qui seront caractérisés par les forces, variables en général à chaque instant, qui ont agi sur le corps.

Ces considérations nous ramènent aussi à des questions très élémentaires de la Géométrie, dont les Grecs se sont occupés avec beaucoup d'intérêt. Un ancien problème, celui de Zenodore ([5]), a été de trouver parmi les courbes planes de longueur donnée, celle qui renferme l'aire la plus grande.

Or, si l'on étudie le problème des isopérimètres et si l'on regarde une aire plane comme dépendant de la courbe qui la renferme, on a une quantité qui dépend de la forme d'une courbe, ou ce qu'on appelle aujourd'hui une *fonction d'une ligne*. Puisqu'une ligne peut être représentée par une fonction ordinaire, l'aire peut être regardée comme une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction. Elle est évidemment une fonction d'une infinité de variables. En effet, on peut

---

([1]) Leibniz, *La Monadologie* (61). *Œuvres philosophiques de Leibniz*, Paris, 1900, p. 716.

([2]) *La mécanique classique et ses approximations successives* (*Riv. di Scienza*, vol. I, 1907).

([3]) *Cf.* Chapitres VII, VIII, XIV.

([4]) Boltzmann, *Zur theorie des elastischen Nachwirkung* (*Wien. Berichte*, 1874; *Pogg. Ann.*, Bd. 7, 1876. Voir aussi *Wiss. Abh.*, I Bd., Leipzig 1909, p. 616).

([5]) P. Tannery, *La Géométrie grecque*. Paris, 1887, p. 25.

l'envisager comme un cas limite d'une fonction de plusieurs variables en supposant que leur nombre croisse indéfiniment, de la même manière qu'une courbe peut être regardée comme le cas limite d'un polygone dont le nombre des côtés augmente à l'infini.

Mais l'aire n'est qu'un cas particulier. De tous côtés on peut trouver d'autres exemples de fonctions de lignes. C'est ainsi que l'action exercée par un courant électrique filiforme flexible sur une aiguille aimantée, dépend de la forme qu'on peut donner au circuit et par suite est une fonction d'une ligne.

Pour réunir dans un concept général tous les différents cas particuliers, il suffit d'imaginer une quantité qui dépende d'une manière arbitraire donnée de la forme d'une courbe. Elle sera une fonction générale de ligne qui correspondra à une quantité dépendant de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions et pourra toujours être envisagée comme une fonction d'une infinité de variables (¹).

En outre, on voit facilement qu'à prendre la fonction d'une ligne comme type des fonctions qui dépendent d'une infinité de variables, on a de multiples avantages, car la locution même appelle à l'esprit une image concrète et offre une représentation intuitive très utile. Il est évident qu'on pourra facilement passer à des quantités qui dépendent de la forme des surfaces, et en général des hypersurfaces en passant aux espaces à plusieurs dimensions.

Ce que nous venons de dire montre donc que, soit par des questions géométriques, soit par des problèmes de Physique, on est amené à faire tout naturellement dans la théorie des fonctions le passage du fini à l'infini que nous avons déjà vu s'accomplir peu à peu, mais d'une manière constante, pendant une longue période de siècles jusqu'à la constitution du calcul infinitésimal.

On peut se demander s'il n'y a pas une voie analytique pure qui puisse nous conduire aussi aux mêmes nouvelles conceptions? La théorie des fonctions ordinaires renferme l'étude des propriétés de toute quantité obtenue par des opérations algé-

---

(¹) VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee* (*Rend. R. Accademia dei Lincei,* 2ᵉ sem. 1887).

briques. Comme Lagrange l'a remarqué ([1]), l'Algèbre n'est qu'une branche de la théorie des fonctions, car les résultats des opérations algébriques sont les fonctions les plus élémentaires envisagées par l'analyse. De même on peut prendre un concept analytique pour point de départ d'une théorie des quantités qui dépendent d'une ligne variable, ou de toutes les valeurs d'une ou plusieurs fonctions de forme variable. La marche à suivre est déjà toute tracée : il suffira de remplacer les opérations de l'Algèbre faites sur un nombre fini de valeurs par des opérations analytiques sur un ensemble continu ou sur toutes les valeurs d'une fonction. Mais nous connaissons déjà des opérations de ce genre. Il suffit de penser à celles que nous avons considérées auparavant, par exemple à l'intégration des substitutions et, en général, des équations différentielles.

Par ces opérations élémentaires et par leur réitération ou leur accouplement, on arrivera évidemment à calculer des classes spéciales de fonctions du nouveau type dont nous parlons. En généralisant la phrase de Lagrange, on dira que toutes ses opérations et leurs théories sont renfermées dans la théorie des fonctions généralisées ([2]).

Donc, les trois types de conceptions fondamentales : géométrique, analytique et le type abstrait et général de dépendance qui se rattache à l'idée de loi physique, se conservent.

9. Coordonner ces différentes considérations, systématiser tout l'ensemble de recherches qui se rattachent à cet ordre d'idées, étudier les nouveaux problèmes qui se présentent à côté des anciens qui sont plus ou moins directement reliés à ces études, voilà une tâche qui se présentait tout naturellement. Il est nécessaire de l'accomplir, car la conception qui lui a donné naissance s'impose par elle-même et il serait impossible d'aborder certaines questions sans entrer dans l'ordre des idées précédentes.

Le temps n'est pas encore venu de classer les différentes branches qui existent à présent et qui pousseront dans l'avenir

---

([1]) LAGRANGE *Leçons sur le calcul des fonctions.* Paris, 1806. Leçon première.

([2]) *Cf.* Chapitre II.

dans cette catégorie d'études. Mais on peut indiquer les principales directions qui ont été prises dans ces recherches et qu'on doit suivre nécessairement puisque le courant constant d'idées et de méthodes que nous avons vu se dérouler mène dans cette voie.

Si une quantité dépend d'une ligne, on pourra étudier quel effet produit sur cette quantité une modification de la ligne. Si cette modification est très petite et limitée au voisinage d'un point de la ligne, on arrivera à la notion de dérivée et pour chaque point de la ligne on aura ainsi une dérivée. En superposant de telles modifications de la ligne faites en tous ses points, on trouvera la différentielle ou variation, qui sera exprimée par une intégrale : en effet une fonction d'une ligne étant une fonction d'un nombre infini de variables, la somme qui exprime la différentielle d'une fonction de plusieurs variables amènera par un passage à la limite à une intégrale (1).

On pourra maintenant poursuivre l'étude des différentielles successives et, par là, arriver à un développement analytique analogue à celui de Taylor. Les sommes simples, doubles et triples, etc., qui paraissent dans le développement d'une fonction de plusieurs variables seront remplacées par des intégrales simples, doubles, triples, etc. (2).

On pourra aussi se proposer la recherche des maxima et des minima. Nous avons déjà remarqué que pour résoudre le problème du maximum d'une aire plane, celle-ci a été envisagée comme une fonction de la ligne de longueur constante qui la renferme. On peut étudier en général les maxima et les minima des fonctions des lignes, ce qui correspond à l'étude des conditions afin que la différentielle s'annule. Cette recherche est très complexe et amène à des classes de questions de natures très différentes. En posant le problème sous sa forme la plus générale, on trouve tantôt des équations différentielles, tantôt des relations d'une nature intégrale et tantôt des relations qui sont des deux types à la fois, ou même des relations plus compliquées. Le premier cas correspond au calcul des varia-

(1) *Cf.* Chapitre II, nos 1, 4. Voir *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, 1re Note, § 2 (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 2e sem. 1887).

(2) *Cf.* Chapitre II, n° 5; *Ibid.*, § 3.

tions, qui a été la création la plus grandiose de Lagrange, mais ce calcul n'épuise pas, comme nous venons de voir, la question des maxima et des minima des fonctions des lignes. Il n'en constitue qu'un Chapitre. Or, si l'on songe qu'en prenant pour type la Mécanique classique et les idées plus récentes de Hertz, on peut tâcher de réduire les différentes questions naturelles à dépendre des maxima ou des minima de certaines fonctions du type généralisé qui correspondent à l'action mécanique, on voit se présenter un champ de recherches assez étendu (1).

Nous avons parlé tout à l'heure du développement d'une fonction de ligne en une série d'intégrales qui correspond au développement d'une fonction analytique par une série de polynomes homogènes, c'est-à-dire à la série de Taylor.

En considérant les différents termes, on tombe sur les formes analytiques d'un nombre infini de variables. Une nouvelle Algèbre est sortie de là et elle a déjà fait beaucoup de progrès (2).

En effet, que peut-on tirer de la corrélation entre l'Algèbre ordinaire et cette nouvelle Algèbre?

Au premier abord, on voit que chaque problème de l'Algèbre ordinaire amène à un nouveau problème qu'on obtient en passant du discontinu au continu par le procédé uniforme que nous avons envisagé depuis le commencement de ce Chapitre. Mais la corrélation nous offre aussi, dans la plupart des cas, des solutions pratiques et fécondes, car si les nouveaux problèmes peuvent être envisagés comme des cas limites des problèmes algébriques ordinaires, leurs solutions bien souvent ne sont que les limites des solutions connues de l'algèbre. C'est ainsi que la théorie générale des systèmes d'équations algébriques passe du discontinu au continu (3).

La première et la plus élémentaire des questions qui se sont présentées tout naturellement à moi dans cet ordre d'idées a été celle à laquelle on arrive en considérant le premier terme du dévelop-

(1) *Cf.* Chapitre III. *Voir* aussi *Sopra un problema di elettrostatica* (*Transunti delle R. Accademia dei Lincei*, 3e série, vol. VIII). *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton* (*Rend. R. Accademia dei Lincei*, 1er sem. 1890).

(2) Je ne fais pas de citation, car la littérature de ce sujet est très connue. On la trouve jusqu'à 1912 à la fin de l'Ouvrage de M. T. Lalesco, *Sur les équaquations intégrales*, Paris, 1912.

(3) *Cf.* Chapitre IV.

pement analogue à celui de Taylor que nous avons envisagé tout à l'heure. Elle peut être définie comme la résolution d'un système infini d'équations algébriques linéaires ayant un nombre infini d'inconnues. La solution que nous donne le principe général s'obtient en passant à la limite dans les solutions algébriques ordinaires par la considération des déterminants infinis, c'est-à-dire en appliquant au déterminant le même passage du discontinu au continu qui, nous l'avons vu, peut s'appliquer à la somme, au produit, aux substitutions.

Mais cette question n'est pas nouvelle. C'est un ancien problème, celui des équations intégrales, dont Abel, Liouville, Sonine et bien d'autres avaient considéré des cas particuliers qu'ils avaient résolus par des artifices spéciaux.

Cependant, une méthode uniforme et générale manquait pour l'étudier d'une manière systématique; elle a été trouvée le jour où les équations intégrales ont été rangées parmi les problèmes appartenant à la classe générale des questions que nous avons envisagées et rattachées aux fonctions des lignes, c'est-à-dire quand elles ont été considérées comme les cas limites d'un système d'équations algébriques de premier degré [1].

Pendant que l'Algèbre se développe dans le sens que nous avons annoncé, d'autres branches de l'analyse marchent aussi dans la même direction. Il suffit de rappeler les intégrales des fonctions de plusieurs variables qui sont de leur nature même des fonctions du contour et par suite rentrent dans la classe des fonctions généralisées dont nous avons parlé. Mais ce que je crois de plus grand intérêt est que la théorie des équations différentielles peut se généraliser, tout en visant à plusieurs buts, par l'effet des mêmes idées [2].

10. Au point de vue newtonien, c'est l'évolution des choses qu'il faut suivre et qu'il faut prévoir.

La fluxion individualise l'évolution instantanée ou élémen-

---

[1] VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definite*, 4 Notes (*Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, vol. XXXI, 1896).

[2] *Cf.* le Chapitre III, n° 8, où l'on envisage les *équations aux dérivées fonctionnelles*, et le Chapitre V et suivants consacrés aux *équations intégro-différentielles*.

taire. Est-elle connue à chaque instant, c'est-à-dire dépend-elle des circonstances extérieures connues, l'évolution pourra s'appeler une *évolution forcée* et tous les états seront déterminés à partir d'un état connu par la somme ou l'intégrale des évolutions élémentaires en nombre infini.

Dans l'évolution des êtres organiques, les théories de Lamarck et de Darwin seraient du type de l'évolution forcée.

Mais l'évolution peut dépendre de causes internes, alors elle doit être considérée de deux manières différentes.

Si, à chaque instant, elle dépend des conditions actuelles, elle sera une évolution non héréditaire et tous les états pourront être déterminés à partir d'un état donné par l'intégration d'équations différentielles.

Si, au contraire, elle dépend de toute l'histoire des états traversés, elle sera une évolution héréditaire. Les équations différentielles ne suffiront plus et les équations intégro-différentielles seront les instruments analytiques qu'il faudra employer. Il est évident que l'évolution forcée se distingue de l'évolution interne, car la première cesse si toute cause extérieure s'annule tandis que la seconde va d'elle-même.

Les trois types d'évolution peuvent subsister en même temps. C'est ainsi que l'oscillation d'une verge peut résulter d'oscillations forcées, d'oscillations dues à ses périodes propres de vibrations, et, en général, elle sera aussi affectée des actions de traînage et d'hystérésis.

L'évolution organique, selon les vues les plus récentes, ne pourrait être due à de seules causes extérieures. Elle serait due aussi à des causes internes. C'est leur caractère héréditaire qui rend très probable cette hypothèse.

Viendra-t-il un jour où les Mathématiques seront applicables au monde organique ? Si le type de son évolution est celui qui semble aujourd'hui le plus probable, l'analyse qui lui devrait convenir serait celle des équations intégro-différentielles et elle s'éloignerait de l'analyse propre à la Mécanique céleste. Ce seront peut-être les études de la biométrique qui amèneront à des lois sur lesquelles les mathématiciens pourront travailler.

Mais ne dépassons pas trop les limites de la Science présente

pour songer à l'avenir. Rêver à l'avenir ou, pour mieux dire, exposer des rêves sur l'avenir est toujours dangereux.

Revenons à l'hérédité dans le monde inorganique où elle joue aussi un rôle très grand. Il y a peu d'années, faute d'une analyse capable de les traiter, on devait abandonner les questions qui se présentaient dès qu'on les avait posées.

L'analyse est maintenant capable d'en donner des solutions aussi complètes, générales et rigoureuses que celles des questions touchant les problèmes où l'hérédité n'entre pas en jeu [1]. Le guide pour les trouver est toujours le même, c'est l'idée simple et féconde qu'Archimède a employée lorsqu'il a étudié, il y a 22 siècles, la quadrature de la parabole.

---

[1] *Cf.* Chapitres VI, VII, VIII, XIV.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE LIGNE. EXEMPLES.

1. 4. Définition, dérivation, calcul de la variation première d'une fonction de ligne. — 5. Exemples simples : les fonctions de ligne qui généralisent les polynomes homogènes à *n* variables. Extension de la série de Taylor. — 6. Les fonctions de ligne introduites par le calcul des variations. — 7. 8. Définition des fonctions de ligne par des équations différentielles. — 9. 11. Digression sur les substitutions : l'intégration des équations différentielles linéaires n'est que du calcul intégral appliqué aux substitutions. — 12. 13. Extension aux fonctions de ligne de la formule de Stokes. Calcul d'une fonction de ligne, sa dérivée étant donnée.

---

1. Nous avons dit, dans le Chapitre précédent, qu'on peut prendre comme type de quantité dépendant d'une infinité de variables *la fonction d'une ligne*. Comme une ligne peut être définie par une fonction (donnant, par exemple, l'ordonnée d'un de ses points quand l'abscisse est connue), on peut aussi considérer une fonction de ligne comme *une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction*.

Nous allons d'abord rappeler, brièvement car elles sont maintenant très connues, les conceptions fondamentales qui se rattachent à cette notion [1].

2. Soit une ligne polygonale (*fig.* 2) ayant n sommets d'abscisses fixes $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, b$ et d'ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$, une fonction de cette ligne polygonale sera une fonction des n variables

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (*Rendic. Lincei*, 1887, 2e sem., p. 97, 141, 153) et *Sopra le funzioni dipendenti da linee* (*Ibid.*, p. 225, 274). — Consulter aussi V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* professées à la Faculté de Rome (Gauthier-Villars, 1913). Chapitre I.

soit

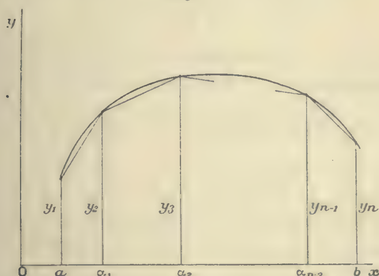
$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Elle aura, sous certaines conditions, n dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = F'_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais une ligne quelconque peut être envisagée comme limite

Fig. 2.



d'une ligne polygonale inscrite dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, ces côtés devenant infiniment petits. A la limite il est donc intuitif qu'une fonction de ligne aura (sous certaines conditions) une infinité de dérivées partielles correspondant, de même que précédemment, aux indices 1, 2, ..., n, à l'abscisse de chacun des points de la ligne.

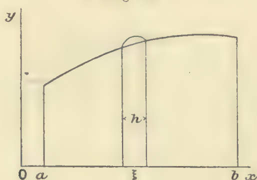
La dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ s'obtient en faisant varier y_i, toutes les autres variables restant constantes. De même pour obtenir la dérivée partielle d'une fonction de ligne relative au point d'abscisse ξ, il faudra faire varier la ligne dans un domaine h qui renferme le point ξ (*fig.* 3), sans changer les autres parties de la ligne. Mais, avant d'aller plus loin, il faut préciser nos notations et poser certaines restrictions.

Nous admettrons que la ligne considérée soit définie pour x compris entre a et b par une équation $y = f(x)$. La fonction de cette ligne se notera alors

$$F\left|\left[f\overset{b}{\underset{a}{(x)}}\right]\right|.$$

Nous supposerons que la fonction f est une fonction continue. Nous supposerons aussi que F est continue, c'est-à-dire qu'en chan-

Fig. 3.



geant $f(x)$ en $f(x)+\varphi(x)$ avec $|\varphi(x)|<\varepsilon$, la variation de F est arbitrairement petite avec ε. En d'autres termes

$$|F|[f(x)+\varphi(x)]|-F|[f(x)]||<\sigma \qquad (|\varphi(x)|<\varepsilon \text{ suffisamment petit}),$$

σ étant arbitrairement petit [1].

Revenons alors à la définition de la *dérivée* d'une fonction de ligne. Donnons à la ligne une variation dans un domaine d'amplitude h renfermant le point ξ et admettons que :

I. Les variations des ordonnées étant en valeur absolue plus petites que ε et la variation correspondante de F étant δF, on a toujours

$$\left|\frac{\delta F}{\varepsilon h}\right|<M,$$

M étant une quantité finie fixe.

II. Si la déformation de la ligne dans l'intervalle h a lieu d'un seul côté de la ligne primitive, c'est-à-dire est obtenue par diminution ou accroissement de toutes les ordonnées, et si σ représente l'aire comprise entre la ligne primitive et la ligne variée, la limite

$$\lim_{\substack{h=0\\ \varepsilon=0}} \frac{\delta F}{\sigma}$$

---

(1) La continuité ainsi définie peut être nommée *continuité pour un voisinage d'ordre* o (*cf.* HADAMARD, *Calcul des variations*, p. 49). On peut avoir aussi à considérer des fonctions continues dans un voisinage d'ordre 1 ou n : une fonction $F|[f(x)]|$ étant dite, par exemple, *continue pour un voisinage d'ordre* 1 lorsque en changeant $f(x)$ en $f(x)+\varphi(x)$ avec $|\varphi(x)|<\varepsilon$, $|\varphi'(x)|<\varepsilon$ la variation de F est arbitrairement petite avec ε.

existe. Cette limite étant fonction de la ligne $f(x)$ et du point ξ, nous la noterons

$$\mathrm{F}'|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}, \xi]|.$$

III. Par rapport à toute fonction $f(x)$ et à toute abscisse ξ, $\frac{\delta \mathrm{F}}{\sigma}$ tend uniformément vers sa limite.

IV. $\mathrm{F}'|[f(x), \xi]|$ est continue par rapport à $f(x)$ et à ξ.

Nous nommerons $\mathrm{F}'|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}, \xi]|$ *la dérivée de* $\mathrm{F}|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}]|$ *prise au point* ξ.

Puisque ξ peut prendre toute valeur entre a et b, on voit bien qu'il existe une infinité de dérivées. Enfin, en comparant $\mathrm{F}'|[f(x), \xi]|$ avec $\mathrm{F}'_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, on constate bien que, comme nous l'avions annoncé, l'abscisse ξ remplace dans la première dérivée l'indice i de la seconde.

3. Supposons maintenant que la ligne $f(x)$ ait été déformée infiniment peu et *sur toute sa longueur* en restant continue. Il est important de savoir calculer la partie du premier ordre de la variation de F.

Dans le cas d'une fonction de n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on trouve, si δy_i est la différentielle de y_i,

$$\delta \mathrm{F} = \sum_{1}^{n} \mathrm{F}'_i \, \delta y_i.$$

Dans le cas d'une fonction de ligne on trouve la formule tout à fait analogue (la somme étant seulement remplacée par une intégrale),

$$\delta \mathrm{F} = \int_a^b \mathrm{F}'|[f(x), \xi]| \, \delta f(\xi) \, d\xi.$$

Nous n'en donnerons pas la démonstration, indiquons seulement qu'elle est une conséquence des conditions I, II, III, IV posées précédemment [1].

La formule précédente peut aussi s'interpréter comme il suit :

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Lincei Rendiconti*, 1887, 2e sem., p. 99, ou *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, p. 19.

donnons à $f(x)$ un accroissement $\varepsilon\psi(x)$ [1] et soit

$$\alpha = \frac{\mathrm{F}|[f(x)+\varepsilon\psi(x)]| - \mathrm{F}|[f(x)]|}{\varepsilon}$$

on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \alpha = \int_a^b \mathrm{F}'|[f(x), \xi]|\psi(\xi)\,d\xi.$$

4. On définira évidemment sans difficulté la dérivée seconde de F.

$\mathrm{F}'|[f(x), \xi]|$ est, si ξ est constant et égal à ξ_1, fonction seulement de $f(x)$; si cette fonction satisfait aux conditions précédemment imposées à F (I, II, III, IV), on pourra en calculer la dérivée en un point ξ_2. On obtiendra ainsi une expression

$$\mathrm{F}''|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}, \xi_1, \xi_2]|$$

qui sera la dérivée seconde de F.

Les dérivées secondes d'une fonction de n variables

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y_i\, \partial y_s} = \mathrm{F}_{i,s}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n)$$

dépendent de deux indices; de même, la dérivée seconde d'une fonction de ligne dépend de deux paramètres ξ_1, ξ_2, le second paramètre ξ_2 désignant l'abscisse du point où l'on modifie la courbe $f(x)$ pour dériver $\mathrm{F}'|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}, \xi_1]|$.

Dans le cas d'une fonction de n variables, on sait que, sous certaines restrictions, on a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y_i\, \partial y_s} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y_s\, \partial y_i}.$$

C'est le principe bien connu de l'*inversion de l'ordre des dérivations*. Pour nos fonctions de ligne, on peut démontrer directement le résultat correspondant suivant :

$$\mathrm{F}''|[f(x), \xi_1, \xi_2]|$$

---

(1) Ou (*mutatis mutandis*) un accroissement fonction de x et de ε et tendant vers zéro avec ε.

est une fonction symétrique des deux lettres ξ_1, ξ_2 [1].

On définira de même les dérivées successives et en général la dérivée $n^{\text{ième}}$

$$F^{(n)}|[f(x), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]|$$

qui est une fonction symétrique des n paramètres qu'elle contient.

5. Donnons quelques exemples : la fonction d'une ligne la plus simple qu'on puisse imaginer est

$$F|[f(x)]| = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant fixée une fois pour toutes et $f(x)$ étant seule variable. On peut l'envisager comme limite d'une fonction du premier degré de n variables

$$\sum_1^n A_i y_i.$$

De même la fonction

$$F|[f(x)]| = \int_a^b \int_a^b f(x_1)f(x_2)\varphi(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

qu'on peut considérer comme limite pour n infini de

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n A_{is} y_i y_s,$$

généralise dans notre théorie la notion de polynome homogène du second degré. Et ainsi de suite, la fonction

$$(a) \quad \int_a^b \ldots \int_a^b f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

correspondant au polynome homogène du $n^{\text{ième}}$ degré [1].

En considérant des sommes d'expressions (a) on aura de nouvelles fonctions de ligne, analogues aux polynomes non homogènes

---

[1] VOLTERRA, *Lincei Rendiconti*, 1887, 2e sem., p. 103, 104.

Nous en donnerons, à la fin de ce Chapitre, une démonstration fondée sur la généralisation du théorème de Stokes.

à n variables et si l'on forme enfin une série d'expressions (a)

$$(a')\left\{\begin{array}{l}\int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,dx+\int_a^b\int_a^b f(x_1)f(x_2)\varphi_2(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2+\ldots\\ \quad+\int_a^b\cdots\int_a^b f(x_1)\ldots f(x_n)\varphi(x_1,\ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n+\ldots,\end{array}\right.$$

convergente dans un certain champ fonctionnnel on aura l'analogue d'une *série de puissances*.

Réciproquement on peut chercher, une fonction de ligne

$$F|[f(x)]|$$

étant donnée, à la développer en une série du type précédent. On obtient ainsi des développements qui généralisent le développement d'une fonction de n variables en série de Taylor ou de Mac Laurin : sous certaines conditions on démontre que [2]

$$F|[f(x)+\psi(x)]|=F|[f(x)]|+\int_a^b F'|[f(x),\xi_1]|\psi(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b F''|[f(x),\xi_1,\xi_2]|\psi(\xi_1)\psi(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots.$$

Ce développement, si $f(x)$ est supposée constante et si $\psi(x)$ est seule variable, est bien de la forme (a') [3].

Mais il est évident qu'avec de tels développements on n'épuisera pas les différentes fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'autres fonctions : pour le voir, il suffit de prendre, par exemple, l'expression

$$F|[f(x)]|=Af(x_1)+\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

---

(1) Remarquons que dans une fonction du type (a) on peut toujours supposer la fonction donnée $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symétrique par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si elle ne l'était pas, on pourrait en effet la remplacer par la fonction symétrique

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\Sigma\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})}{n!}$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ représentent toutes les permutations des nombres 1, 2, ..., n.

(2) VOLTERRA, *Lincei Rendiconti*, 1887, 2e sem., p. 105.

(3) Chaque terme du développement (a') est la limite d'une forme algébrique. Le second terme correspond à une forme quadratique. Son étude approfondie est renfermée dans les travaux publiés depuis 1904 par M. Hilbert, dont les intéressantes applications sont bien connues. *Cf*. D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Leipzig, 1912.

qui est une fonction continue de toutes les valeurs de $f(x)$, mais qui, au point x_1, n'a pas de dérivée au sens précédemment indiqué, puisque autour de ce point la condition (I) du nº **2** n'est pas satisfaite. Il en est de même de la fonction

$$Af(x_1) + A_1 f'(x_1) + \ldots + A_n f^{(n)}(x_1) + \ldots + \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Nous dirons qu'une telle fonction dépend *d'une manière spéciale* des valeurs de f et de ses dérivées au point x_1; le point x_1 sera dit *point exceptionnel* (¹).

6. L'intégrale simple

$$\int_a^b \Phi[f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x), x]\,dx,$$

qu'on étudie dans le calcul des variations est aussi une fonction

$$F|[f(x)]| \ (^2).$$

En calculant sa variation on sait qu'on trouve

$$\delta F = \int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial\Phi}{\partial f''} - \ldots\right)\delta f\,dx + B,$$

B représentant des termes qui ne dépendent que des limites de l'intégrale. Donc, on a dans ce cas

$$F'|[f(x), \xi]| = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial\Phi}{\partial f''} - \ldots\right)_{x=\xi};$$

ainsi la dérivée F′ ne dépend de f dans l'intervalle a, b, que par les valeurs de f et de ses dérivées au point ξ.

Pour l'intégrale double

$$F|[f(x)]| = \int_a^b \int_a^b \Phi[f(x_1), f'(x_1), \ldots f(x_2), f'(x_2), \ldots x_1, x_2]\,dx_1\,dx_2,$$

(¹) VOLTERRA, *Lincei Rend.*, 1887, 2ᵉ sem., p. 141 et suiv. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles,* p. 26.

(²) Elle nous fournit précisément un exemple du mode de continuité envisagé plus haut (nº 2, Note) : Si Φ est une fonction continue, l'intégrale est une fonction de la ligne $f(x)$ *continue pour un voisinage d'ordre n.*

on aura

$$\delta F = \int_a^b \int_a^b \left\{ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial f(x_1)} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Phi}{\partial f'(x_1)} + \ldots \right] \delta f(x_1) \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial f(x_2)} - \frac{d}{dx_2} \frac{\partial \Phi}{\partial f'(x_2)} + \ldots \right] \delta f(x_2) \right\} dx_1\, dx_2 + B,$$

B représentant des termes qui ne dépendent pas des variations de f et de ses dérivées en d'autres points que a et b.

En posant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f(x_1)} - \frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Phi}{\partial f'(x_1)} + \frac{d^2}{dx_2} \frac{\partial \Phi}{\partial f''(x_1)} - \ldots = p(x_1, x_2),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial f(x_2)} - \frac{d}{dx_2} \frac{\partial \Phi}{\partial f'(x_2)} + \ldots = q(x_1 . x_2),$$

on a

$$\delta F = \int_a^b \delta f(\xi)\, d\xi \int_a^b [p(\xi, \eta) + q(\eta, \xi)]\, d\eta + B,$$

d'où

$$F'[f(x), \xi] = \int_a^b [p(\xi, \eta) + q(\eta, \xi)]\, d\eta.$$

Nous aurons enfin l'occasion, dans l'étude du principe du cycle fermé ([1]), de considérer des fonctions de ligne définies par des séries de forme

$$F = \int_a \Phi_1[x, f(x), f'(x), \ldots]\, dx$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \Phi_2[x_1, f(x_1), f'(x_1), \ldots, x_2, f(x_2), f'(x_2), \ldots]\, dx_1\, dx_2 + \ldots.$$

Ces séries comprennent comme cas particulier les séries précédentes.

7. Nous montrerons, dans les Chapitres suivants, comment on peut définir de nouvelles quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction, par une *voie implicite* tout à fait analogue à celle qui permet de définir les fonctions implicites ordinaires. Nous verrons que les équations intégrales classiques ne constituent que des cas particuliers simples de ces équations implicites. Mais

([1]) Chapitre VII.

auparavant, nous allons indiquer une autre méthode analytique pour définir des fonctions de ligne *en partant des équations différentielles*.

Traitons d'abord un cas simple. Soit une équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{1}$$

et une intégrale $y(x)$ de cette équation *déterminée par des valeurs initiales fixes de* y *et* y'_x *en* $x = 0$. Prenons la valeur de cette intégrale $y(x)$ en un point d'abscisse X fixe. Si maintenant nous modifions $p(x)$, ou $q(x)$, ou $p(x)$ et $q(x)$ simultanément dans l'intervalle (OX), il est évident que $y(X)$ sera une fonction de toutes les valeurs de $p(x)$ et $q(x)$ dans l'intervalle considéré.

Si, pour simplifier, nous supposons $p(x)$ fixe, $y(X)$ sera une fonction

$$y|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}]|.$$

Nous allons nous proposer de calculer sa dérivée

$$y'|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi]|;$$

nous utiliserons dans ce but la méthode générale déjà plusieurs fois employée dans les paragraphes précédents, qui consiste à calculer d'abord la variation première de y.

Quand q prend une variation δq, y prend une variation δy telle que

$$\frac{d^2\delta y}{dx^2} + p(x)\frac{d\,\delta y}{dx} + q(x)\,\delta y = -y\,\delta q;$$

si donc y_1 et y_2 sont deux intégrales fondamentales de (1), on aura

$$\delta y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1(x)\int_0^x \frac{y(\xi)y_2(\xi)}{D(\xi)}\,\delta q(\xi)\,d\xi$$
$$- y_2(x)\int_0^x \frac{y(\xi)y_1(\xi)}{D(\xi)}\,\delta q(\xi)\,d\xi$$

avec

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} y_1(\xi), & y_2(\xi) \\ y'_1(\xi), & y'_2(\xi) \end{vmatrix},$$

C_1 et C_2 étant des constantes à déterminer par les conditions initiales, à savoir

$$(\delta y)_{x=0} = 0, \qquad \left(\delta \frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

On trouve finalement

$$\delta y = \int_0^x \frac{1}{D(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1(\xi), & y_2(\xi) \end{vmatrix} y(\xi)\, \delta q(\xi)\, d\xi,$$

d'où l'on tire

$$y'|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi]| = \frac{1}{D(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(X), & y_2(X) \\ y_1(\xi), & y_2(\xi) \end{vmatrix} y(\xi).$$

Pour calculer la dérivée seconde, posons $\xi = \xi_1$ et supposons d'abord $\xi_2 > \xi_1$. Alors $y_1(\xi_1)$, $y_2(\xi_1)$, $y(\xi_1)$, $D(\xi_1)$ ne changeant pas, on aura

$$y''|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_1, \xi_2]| = \frac{1}{D(\xi_1)} \begin{vmatrix} y'_1|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]|, & y'_2|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]| \\ y_1(\xi_1), & y_2(\xi_1) \end{vmatrix} y(\xi_1),$$

d'où finalement

$$y''|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_1, \xi_2]| = \frac{1}{D(\xi_1)D(\xi_2)} \begin{vmatrix} y_1(X), & y_2(X) \\ y_1(\xi_2), & y_2(\xi_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(\xi_2), & y_2(\xi_2) \\ y_1(\xi_1), & y_2(\xi_1) \end{vmatrix} y(\xi_1).$$

Par suite de la symétrie par rapport à ξ_1 et ξ_2, la dérivée seconde ainsi calculée pour $\xi_2 > \xi_1$ sera aussi connue pour $\xi_2 < \xi_1$. On pourrait d'ailleurs faire, dans ce dernier cas, le calcul direct et vérifier ainsi la symétrie : en effet, en remarquant que $D(\xi_1)$ ne dépend pas de q, on aura

$$\begin{aligned} y''|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_1, \xi_2]| = {} & \frac{1}{D(\xi_1)} \begin{vmatrix} y'_1|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]|, & y'_2|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]| \\ y_1(\xi_1), & y_2(\xi_1) \end{vmatrix} y(\xi_1) \\ & + \frac{1}{D(\xi_1)} \begin{vmatrix} y_1(X), & y_2(X) \\ y'_1|[q\overset{\xi_1}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]|, & y'_2|[q\overset{\xi_1}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]| \end{vmatrix} y(\xi_1) \\ & + \frac{1}{D(\xi_1)} \begin{vmatrix} y_1(X), & y_2(X) \\ y_1(\xi_1), & y_2(\xi_2) \end{vmatrix} y'|[q\overset{\xi_1}{\underset{0}{(x)}}, \xi_2]| \end{aligned}$$

qui donnera, toutes réductions faites, la valeur cherchée de y''.

Le calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ n'est pas plus difficile et l'on trouve

$$y^{n)}|[q\overset{X}{\underset{0}{(x)}}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]|$$
$$= \frac{1}{D(\xi_1)D(\xi_2)\ldots D(\xi_n)}(X, \xi_n)(\xi_n, \xi_{n-1})\ldots(\xi_2, \xi_1)y(\xi_1)$$

en supposant $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \ldots < \xi_n$ et en posant

$$(a, b) = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_2(b), & y_2(b) \end{vmatrix}.$$

8. Nous pourrons de même, en général, calculer la dérivée d'une fonction $y|[\varphi(x)]|$ définie par une équation différentielle quelconque ([1]).

Soit l'équation

$$(1') \qquad f\left[y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m)}(x), x\right] = 0$$

et supposons données les valeurs de

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \qquad \text{pour} \qquad x = \text{A}.$$

La valeur de $y(x)$ en $x = \text{B}$ dépendra de toutes les valeurs de $\varphi(x)$ dans l'intervalle A, B. C'est une fonction de ligne $\text{Y}|[\varphi\overset{\text{B}}{\underset{\text{A}}{(x)}}]|$ dont nous voulons calculer la dérivée

$$\text{Y}'|[\varphi\overset{\text{B}}{\underset{\text{A}}{(x)}}, \xi]|.$$

Une différentiation nous donne

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(m)}}\delta\varphi^{(m)} = 0,$$

d'où, en multipliant par une fonction à déterminer λ et en intégrant entre les limites A et B,

$$\int_{\text{A}}^{\text{B}} \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(m)}}\delta\varphi^{(m)}\right]dx = 0,$$

([1]) VOLTERRA, *Lincei Rend.*, 1887, 2e semestre, p. 155.

et enfin, après des intégrations par parties classiques en calcul des variations :

$$\int_A^B \Big\{ \delta y \Big[\lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\lambda\Big) + \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial y''}\lambda\Big) + \ldots \Big]$$

$$+ \delta\varphi \Big[\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi'}\Big) + \ldots \Big] \Big\} dx$$

$$+ \Big(\sum_0^{n-1} p_i \frac{\partial^i \delta y}{\partial x^i} \Big)_A^B + \Big(\sum_0^{m-1} q_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \Big)_A^B = 0,$$

formule où les p_i et les q_i sont des quantités faciles à calculer. On trouve

$$p_i = \sum_{r\,1}^{n-i} (-1)^{n-r-i} \frac{d^{n-r-i}}{dx^{n-r-i}} (\lambda a_{n-r+1}),$$

$$q_i = \sum_{r\,1}^{m-i} (-1)^{m-r-i} \frac{d^{m-r-i}}{dx^{m-r-i}} (\lambda b_{m-r+1}),$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(h)}} = a_h, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(h)}} = b_h.$$

Si nous prenons maintenant λ solution de l'équation

$$(2) \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\lambda\Big) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\lambda\Big) = 0,$$

et si nous remarquons en plus que d'après les conditions initiales

$$\Big(\sum_0^{n-1} p_i \frac{d^i \delta y}{dx^i} \Big)_A = 0,$$

il viendra

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_0^{n-1} \mathrm{P}_i \frac{d^i \delta \mathrm{Y}}{dx^i} = &- \Big(\sum_1^{n-1} q_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \Big)_A^B \\ &- \int_A^B \Big[\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{dy}\Big(\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi'}\Big) + \ldots \Big] \delta\varphi \, dx, \end{aligned} \right.$$

en appelant P_i la valeur de p_i en $x = \mathrm{B}$.

Or l'équation (2) est une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre en λ. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ un système d'intégrales fondamentales. En remplaçant dans l'équation précédente λ par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ successivement, on obtiendra un système de n

équations linéaires par rapport aux n quantités inconnues

$$\delta Y, \quad \frac{d}{dx}\delta Y, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\delta Y.$$

On vérifie facilement que le déterminant des coefficients P_i est différent de o, si $a_n \gtrless 0$. En effet, si $P_{i,s}$ désigne la valeur de P_i quand on y remplace λ par λ_s, ce déterminant peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} P_{0,1}, & P_{0,2}, & \ldots & P_{0,n} \\ P_{1,1}, & P_{1,2}, & \ldots & P_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n-1,1}, & P_{n-1,2}, & \ldots & P_{n-1,n} \end{vmatrix} = \pm A_n^n \begin{vmatrix} \lambda_1, & \dfrac{d\lambda_1}{dx}, & \ldots & \dfrac{d^{(n-1)}\lambda_1}{dx^{(n-1)}} \\ \lambda_2, & \dfrac{d\lambda_2}{dx}, & \ldots & \dfrac{d^{(n-1)}\lambda_2}{dx^{(n-1)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n, & \dfrac{d\lambda_n}{dx}, & \ldots & \dfrac{d^{(n-1)}\lambda_n}{dx^{(n-1)}} \end{vmatrix}_{x=B} = \pm A_n^n D,$$

A_n étant la valeur de a_n pour $x = B$.

On peut donc tirer des équations précédentes

$$(4) \qquad \delta Y = \left[\sum_0^{m-1} A_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx_i}\right]_A^B + \int_A^B M\,\delta\varphi\,dx,$$

les A_i et M étant des quantités (ne dépendant pas de $\delta\varphi$ et de ses dérivées) qui se calculent sans difficultés. Si l'on nomme $M_{i,s}$ le déterminant réciproque de $P_{i,s}$, on aura

$$A_i = \frac{1}{\mp A_n^n D}\sum_0^{n-1}{}_s\, q_{i,s} M_{s,0},$$

$$M = \frac{1}{\mp A_n^n D}\sum_0^{m}{}_i \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda_s b_i) M_{s,0}.$$

De cette formule (4) on conclut que Y dépend d'une façon spéciale de φ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ aux points A et B, et qu'on a

$$Y'|[\varphi(\overset{A}{\underset{B}{x}}), \xi]| = M.$$

9. Lorsqu'on a l'expression

$$y = \int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est une fonction fixe, tandis que $\varphi(x)$ est variable, on voit d'une manière évidente comment on calculera y à partir de toutes les valeurs de $\varphi(x)$ dans l'intervalle A, B. Il suffit de se rappeler la définition même d'une intégrale.

Lorsque y est définie par une équation générale du type (1') il est de même utile de savoir l'obtenir *par des calculs effectués sur toutes les valeurs de* $\varphi(x)$ *et de ses dérivées dans l'intervalle* AB. Il suffit pour cela d'utiliser la méthode donnée par Cauchy pour démontrer l'existence des intégrales des équations différentielles, ou encore la méthode des approximations successives de M. Picard. Et ceci se rattache à ce que nous avons dit dans le premier Chapitre où nous avons regardé l'opération d'intégration d'une équation différentielle comme une opération infinitésimale du même type que la quadrature [1].

Nous allons développer cette idée, non pas dans le cas général, mais dans le cas particulier des équations différentielles linéaires.

Nous avions indiqué, dans le premier Chapitre, que l'intégration des équations différentielles linéaires n'était que le calcul différentiel et intégral appliqué aux substitutions : c'est ce fait que nous allons démontrer maintenant [2].

Je me permets cette petite digression à côté du sujet principal : en plus de son intérêt propre, elle nous sera l'occasion d'énoncer quelques théorèmes sur les substitutions, théorèmes que nous utiliserons dans l'étude, l'une des plus importantes que nous ayons à faire dans les Chapitres suivants, *de l'opération de composition* [3].

10. Rappelons d'abord ce qu'on entend par *substitution linéaire*. Soit le tableau carré

$$S = \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ a_{31}, & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & \dots & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\},$$

(1) Chapitre I, n° 5.

(2) Chapitre I, n° 6.

(3) Chapitre IX

il définit une substitution linéaire, parce qu'il peut servir à transformer linéairement des variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

en des variables

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

par les formules

$$y_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit une nouvelle substitution linéaire

$$T = \begin{Bmatrix} b_{11}, & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}, & \ldots & b_{nn} \end{Bmatrix};$$

appliquer aux x la substitution S, puis la substitution T revient à leur appliquer une substitution U qu'on appelle *produit des deux substitutions* S et T, et qu'on écrit

$$(5) \qquad U = TS.$$

Les coefficients de la substitution produit se calculent sans difficultés et l'on vérifie facilement le fait que

$$TS \quad \text{et} \quad ST$$

ne sont pas égales en général : la multiplication des substitutions n'est pas commutative, mais elle est associative, c'est-à-dire que

$$(TS)V = T(SV).$$

L'égalité (5) peut aussi s'écrire

$$(5') \qquad T^{-1}U = S,$$
$$(5'') \qquad US^{-1} = T,$$

T^{-1} et S^{-1} étant les substitutions inverses de T et S, c'est-à-dire telles que

$$T^{-1}T = 1, \qquad SS^{-1} = 1,$$

équations où 1 désigne la *substitution identique* représentée par le tableau

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & 1 \end{Bmatrix}.$$

Remarquons enfin que puisque la multiplication n'est pas commutative, la substitution TST^{-1} ne coïncidera pas en général avec la substitution S. On la nomme *transformée de* S *par rapport à* T.

11. Supposons maintenant que les coefficients a_{is} de la substitution soient des fonctions continues et dérivables d'une variable x. Nous dirons que la substitution est fonction de x et nous la noterons

$$S(x).$$

Formons

$$S(x+dx)$$

et les produits de substitutions

$$S^{-1}(x)S(x+dx), \tag{6}$$

$$S(x+dx)S^{-1}(x). \tag{7}$$

Ces deux substitutions, qui en général ne sont pas égales entre elles, sont infiniment voisines de la substitution identique, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21}, & 1+\varepsilon_{22}, & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1}, & \varepsilon_{n2}, & \dots & 1+\varepsilon_{nn} \end{pmatrix},$$

les quantités ε_{is} étant des infiniment petits du même ordre que dx. Retranchons l'unité des éléments de la diagonale, divisons par dx et passons à la limite, on trouvera en général deux limites différentes selon qu'on est parti de l'expression (6) ou de l'expression (7). Ces limites existent et on peut les appeler *dérivée à droite* et *dérivée à gauche* de la substitution primitive.

Pour définir l'intégration des substitutions, prenons maintenant une substitution $T(x)$ dont les éléments soient des fonctions *continues* de x dans l'intervalle a, b. Divisons a, b en n parties h_1, h_2, ..., h_n et considérons les substitutions T_1, T_2, ..., T_n telles que $T_i = T(x_i)$, x_i étant un point intérieur à l'intervalle h_i. Multiplions par h_i les éléments de T_i et ajoutons l'unité aux éléments de la diagonale, nous obtiendrons une substitution R_i qui est très voisine de la substitution identique dès que h_i est petit. Soient les

deux produits

(8) $$R_1 R_2 \ldots R_n$$

et

(9) $$R_n R_{n-1} \ldots R_1;$$

lorsque, n augmentant indéfiniment, les intervalles $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro, les deux produits (8) et (9) tendent vers des limites différentes de l'identité. Ces limites peuvent être nommées *intégrales* entre a et b de la substitution T et l'on voit que de même qu'il y avait une dérivée à droite et une dérivée à gauche il y aura une *intégrale à droite* et une *intégrale à gauche*.

L'opération d'intégration que nous venons de définir est bien l'opération inverse de la dérivation étudiée précédemment. En d'autres termes si, partant d'une substitution, on l'intègre à droite puis la dérive, on retombe sur la substitution primitive. On peut de même transporter au calcul intégral et différentiel des substitutions la plupart des théorèmes du calcul intégral et différentiel ordinaire.

Nous sommes maintenant en état de montrer comment cette théorie comprend celle des équations différentielles linéaires : soit la substitution

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \ldots & \ldots & 0 \\ 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0, & 1 \\ p_n, & p_{n-1}, & \ldots & \ldots & \ldots & p_2, & 0 \end{pmatrix},$$

où $p_2, \ldots, p_n$ sont des fonctions finies et continues de x. Formons son intégrale à *gauche* entre a et x par le procédé indiqué précédemment. On constatera sans peine qu'elle est de forme

$$S(x) = \begin{pmatrix} v_1(x), & v_2(x), & \ldots & v_n(x) \\ v_1'(x), & v_2'(x), & \ldots & v_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ v_1^{(n-1)}(x), & \ldots\ldots & \ldots & v_n^{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

$v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ étant n intégrales linéairement indépen-

dantes de l'équation différentielle linéaire

$$(9') \qquad y^{(n)} = p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \ldots + p_n y \quad [1];$$

et ceci montre bien que la connaissance de $S(x)$, substitution intégrale à gauche de $T(x)$, entraîne la connaissance de l'intégrale générale de l'équation $(9')$.

Nous ne développerons pas cette théorie qui nous entraînerait en dehors du cadre de ces leçons [2]; il nous suffit d'avoir montré nettement que, pour intégrer l'équation différentielle, il faut opérer sur toutes les valeurs des coefficients entre a et x et que par suite les intégrales dépendent évidemment de toutes les valeurs des coefficients entre a et x.

12. Considérons pour terminer le cas où x est une variable complexe, T étant une substitution fonction de cette variable. Nous représenterons alors $x = \xi + i\eta$ par un point d'un domaine plan et nous pourrons définir l'intégrale de T prise le long d'une courbe de ce plan. Si nous calculons cette intégrale le long d'une courbe fermée s ne contenant dans son intérieur aucun point singulier des coefficients de T, nous trouverons pour résultat de l'intégration la substitution identique; si au contraire la courbe fermée s contient des singularités de T, nous trouverons pour résultat une substitution S différente en général de l'identité. Si enfin nous intégrons le long d'une seconde courbe fermée s_1 contenant les mêmes singularités que la première s, le résultat S_1 de l'intégration n'est autre que la substitution S transformée par une nouvelle substitution A : on a

$$S_1 = ASA^{-1}.$$

Ces théorèmes sont les théorèmes classiques de Cauchy sur les

---

(1) A laquelle, comme on le sait, se ramène l'équation différentielle linéaire générale

$$(10) \qquad y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y.$$

(2) Pour plus de détails, consulter VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* [*Memorie della Società Italiana delle Scienze* (detta dei XL), 3e série, t. VI].

intégrales des fonctions de variable complexe transportés à la théorie des intégrales des substitutions.

Nous ne nous occuperons pas de l'extension de la théorie des résidus qui se présente ici tout naturellement et qui conduit à nouveau aux résultats de Fuchs sur les équations différentielles linéaires. On voit tout de suite que cette question est étroitement rattachée à la suivante : étude des substitutions qui sont les transformées l'une de l'autre par une troisième substitution.

L'intégration des substitutions qui dépendent d'une variable complexe conduira, toujours comme l'intégration des fonctions de variable complexe, à des substitutions tantôt monodromes, tantôt polydromes. La polydromie consistant ici dans le fait qu'en revenant au point de départ, la substitution est multipliée par une substitution constante. L'intégrale d'une substitution monodrome sur une surface de Riemann est en général polydrome, et si l'on a effectué sur la surface les coupures qui la rendent simplement connexe, les valeurs de la substitution des deux côtés de chaque coupure se déduisent l'une de l'autre par la multiplication avec une substitution constante : cette dernière substitution jouant un rôle analogue à la *constante de coupure*.

Les substitutions qu'on obtient ainsi peuvent se nommer *substitutions abéliennes*. Il faudra les séparer en deux classes : celles que l'on peut exprimer par des intégrales abéliennes et celles qui ne sont pas susceptibles d'une telle expression. Les premières sont dites *apparentes* et les secondes *essentielles*. Il est très important de savoir distinguer les unes des autres, afin de savoir quand on obtient des transcendantes connues et quand, au contraire, on en introduit de nouvelles [1].

La question se ramène à trouver toutes les substitutions permutables avec une substitution donnée et à voir sous quelle condition les substitutions permutables avec une substitution donnée sont permutables entre elles. Les mêmes problèmes se posent dans la théorie des fonctions permutables de deuxième espèce que nous

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (*Memorie della Società Italiana delle Scienze*, 3ᵉ série, t. XII), § 8, théorèmes V et VI.

aurons l'occasion de développer (1), aussi je vais exposer rapidement comment ils se résolvent (2).

Formons l'équation algébrique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0;$$

si ω_i est une racine de multiplicité l, $(\omega - \omega_i)^l$ sera un diviseur du déterminant. Soit $(\omega - \omega_i)^{l_1}$ la plus haute puissance de $\omega - \omega_i$ qui divise tous les déterminants mineurs d'ordre $n - 1$, $(\omega - \omega_i)^{l_2}$ la plus haute puissance qui divise tous les déterminants d'ordre $n - 2$ et ainsi de suite. Soit

$$l - l_1 = e, \qquad l_1 - l_2 = e_1, \qquad \ldots,$$

d'où

$$l = e + e_1 + e_2 + \ldots,$$

d'où enfin

$$(\omega - \omega_i)^l = (\omega_i - \omega_i)^e (\omega - \omega_i)^{e_1} (\omega_i - \omega_i)^{e_2} \ldots;$$

chacun des facteurs $(\omega - \omega_i)^{e_n}$ est dit un diviseur élémentaire du déterminant.

Ceci posé, *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les substitutions permutables avec*

$$S = \begin{Bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

soient permutables entre elles, est que tous les diviseurs élémentaires aient des bases $\omega - \omega_i$ *différentes.* Nous nommerons alors la substitution S *substitution élémentaire.*

En outre, les diviseurs élémentaires étant connus, on peut calculer toutes les substitutions permutables avec S.

---

(1) *Cf.* Chapitre XII, n° 3.

(2) *Cf.* Volterra, *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari*, § 6 (*Rend. del Circolo M. di Palermo*, t. II, 1888); *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, Préliminaires (*Memorie della Società Italiana delle Scienze,* série III, t. XII).

13. Nous avons vu, au début de ce Chapitre, comment un passage du fini à l'infini amenait de la notion de *fonction de n variables* à celle de *fonction de toutes les valeurs d'une autre fonction*. Les notions de dérivée partielle, de différentielle totale, se sont généralisées immédiatement. En général, *ce même passage à la limite nous permettra de passer des propriétés ou des problèmes relatifs aux fonctions de n variables à des propriétés ou des problèmes relatifs aux fonctions qui dépendent d'autres fonctions*. Nous en rencontrerons tout le long de ce cours de nombreux exemples. En voici un, *la généralisation du théorème de Stokes*, qui nous permettra de résoudre le problème fondamental suivant : *reconnaître si une fonction*

$$G|[f(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi]|$$

est la dérivée d'une fonction de ligne et calculer cette fonction.

Le théorème de Stokes s'énonce

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_l (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \\ &\quad = \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos nx \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos nz \right] d\sigma, \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z étant trois fonctions de x, y, z finies et continues ainsi que leurs premières dérivées, l le contour de la surface σ et n la normale à σ. On peut dire encore : *la circulation d'un vecteur le long d'une ligne fermée est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque limitée par cette ligne.*

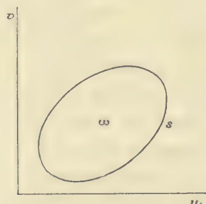
Je renvoie pour la démonstration de ce théorème aux cours d'Analyse ou de Physique mathématique.

On peut aussi, prenant sur la surface σ des coordonnées curvilignes u et v, écrire la formule (10)

$$(10')\quad \left\{\begin{aligned} &\int_l (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \\ &\quad = \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{d(y,z)}{d(u,v)} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right] du\,dv, \end{aligned}\right.$$

et interpréter comme il suit le théorème de Stokes : considérons une aire plane ω du plan des u, v limitée par un contour s,

Fig. 4.



soient x, y, z des fonctions de u et v, X, Y, Z des fonctions de x, y, z, on aura

$$\int_s \left(\mathrm{X} \frac{dx}{ds} + \mathrm{Y} \frac{dy}{ds} + \mathrm{Z} \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_\omega \left[\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} \right) \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + \ldots \right] du\, dv.$$

Ce théorème se généralise immédiatement de la façon suivante : soient x_1, x_2, ..., x_n, n fonctions de u et v, et X_1, X_2, ..., X_n n fonctions de x_1, x_2, ..., x_n, toutes ces fonctions étant finies et continues avec leurs premières dérivées, on a

$$(11) \quad \int_s \sum_i^n {}_1 \mathrm{X}_i \frac{dx_i}{ds} ds = \frac{1}{2} \int_\omega \sum_r^n {}_1 \sum_s^n {}_1 \left(\frac{\partial \mathrm{X}_r}{\partial x_s} - \frac{\partial \mathrm{X}_s}{\partial x_r} \right) \frac{d(x_s, x_r)}{d(u, v)} du\, dv,$$

formule qui contient la précédente pour $n = 3$. On pourrait lui donner une interprétation géométrique en regardant x_1, x_2, ..., x_n comme les coordonnées d'un point d'une surface dans l'espace à n dimensions. C'est tout à fait inutile pour les considérations suivantes.

14. Il est maintenant facile de passer dans la formule (11) du nombre fini au nombre infini de variables. Il faut remplacer x_1, x_2, ..., x_n par une fonction $x(t)$ définie pour

$$a \leqq t \leqq b,$$

l'indice t remplaçant les indices 1, 2, ..., n. Il faut enfin remplacer les fonctions X_1, X_2, ..., X_n par une quantité dépendant

d'un paramètre η (¹) et de toutes les valeurs de $x(t)$ dans l'intervalle ab. Soit

$$X|[x\overset{b}{\underset{a}{(}}t), \eta]|$$

cette quantité.

Supposons maintenant qu'à chaque point de l'aire ω corresponde une fonction $x(t)$, soit que l'on connaisse

$$x(t \,|\, u, v),$$

et notons

$$x(t \,|\, s),$$

celles de ces fonctions qui correspondent aux points du contour de ω. Admettons enfin que x et X soient continues et dérivables. Il est facile de démontrer la formule suivante :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_s ds \int_a^b X|[x(\overset{b}{\underset{a}{t}} \,|\, s), \eta]| \frac{dx(\eta \,|\, s)}{ds}\, d\eta \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_\omega du\, dv \int_a^b \int_a^b \Big\{ X'|[x(t \overset{b}{\underset{a}{|}} u, v), \eta, \xi]| \\ &\qquad\qquad\qquad - X'|[x(t \overset{b}{\underset{a}{|}} u, v), \xi, \eta]| \Big\} \\ &\quad \times \frac{d[x(\xi \,|\, u, v), x(\eta \,|\, u, v)]}{d(u, v)}\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right.$$

$X'|[x(t \overset{b}{\underset{a}{|}} u, v), \eta, \xi]|$ désignant la dérivée de

$$X|[x(t \overset{b}{\underset{a}{|}} u, v), \eta]|,$$

considérée comme fonction de $x\overset{b}{\underset{a}{(}}t)$, prise au point $t = \xi$ et

$$X'|[x(\overset{b}{\underset{a}{t}} \,|\, u, v), \xi, \eta]|$$

désignant la dérivée de

$$X|[x(\overset{b}{\underset{a}{t}} \,|\, u, v), \xi]|$$

prise au point $t = \eta$. En d'autres termes, le *second paramètre* qui figure dans la dérivée indique le point où l'on effectue la dérivation.

(¹) Jouant le rôle des indices 1, 2, ..., n.

La formule (12) est la généralisation attendue de la formule de Stokes. Pour la démontrer directement il suffit d'appliquer à la transformation de l'intégrale curviligne du premier membre la formule de Green

$$\int_s (\mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv) = \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} \right) du\,dv,$$

en utilisant, pour calculer

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v},$$

le résultat du n° 3 sur la variation première d'une fonction de ligne. Le premier membre de (12) s'écrit alors

$$\int_\omega \Bigg(\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \int_a^b \mathrm{X} \,|\, [x(t \,\Big|_a^b\, u, v), \eta] \,|\, \frac{\partial x(\eta \,|\, u, v)}{\partial v}\, d\eta \right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_a^b \mathrm{X} \,|\, [x(t \,\Big|_a^b\, u, v), \eta] \,|\, \frac{\partial x(\eta \,|\, u, v)}{\partial u}\, d\eta \right\} \Bigg)\, du\,dv,$$

mais comme on a (n° 3)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \int_a^b \mathrm{X} \,|\, [x(t \,\Big|_a^b\, u, v), \eta] \,|\, \frac{\partial x(\eta \,|\, u, v)}{\partial v}\, d\eta \right\}$$

$$= \int_a^b \mathrm{X} \,|\, [x(t \,\Big|_a^b\, u, v), \eta] \,|\, \frac{\partial^2 x(\eta \,|\, u, v)}{\partial u\, \partial v}\, d\eta$$

$$+ \int_a^b d\eta \int_a^b \mathrm{X}' \,|\, [x(t \,|\, u, v), \eta, \xi] \,|\, \frac{\partial x(\xi \,|\, u, v)}{\partial u}\, \frac{\partial x(\eta \,|\, u, v)}{\partial v}\, d\xi,$$

et une expression analogue pour

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_a^b \mathrm{X} \,|\, [x(t \,\Big|_a^b\, u, v), \eta] \,|\, \frac{\partial x(\eta \,|\, u, v)}{\partial u}\, d\eta \right\},$$

on arrive finalement à la formule (12).

15. Indiquons une application de la formule (12).

Le théorème de Stokes ordinaire peut servir à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz,$$

soit une différentielle totale exacte et à intégrer cette différentielle. La formule (11) peut servir à trouver les conditions pour que

$$\sum_1^n X_i\, dx_i$$

soit une différentielle totale exacte et à intégrer cette expression.

On peut tirer de même de la formule (12) la condition pour que

$$\int_a^b X\,|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \eta]|\, \delta x(\eta)\, d\eta$$

soit la différentielle totale exacte d'une fonction de ligne que nous saurons alors calculer. Il faut que

$$X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \eta,\, \xi]| = X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \xi,\, \eta]|,$$

le second paramètre indiquant toujours, dans les expressions précédentes, le point où l'on effectue la dérivation.

C'est la *condition de symétrie de la dérivée seconde* que nous avions déjà indiquée.

On peut énoncer le résultat précis suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $X|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \eta]|$ *soit la dérivée d'une fonction de ligne* $F|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}}]|$ *est que*

(13) $$X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \eta,\, \xi]| = X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \xi,\, \eta]|.$$

On saura calculer cette fonction de ligne.

Supposons en effet que, η étant compris entre a et b, $X|[x\overset{b}{\underset{a}{(t)}},\, \eta]|$ existe quelle que soit $x(t)$ pourvu que cette fonction soit continue et que ses valeurs soient comprises entre des limites bien déterminées M, N. X est ainsi définie dans un certain champ fonctionnel. Pour calculer $F|[x(t)]|$ dans le même champ fonctionnel, on pourra prendre arbitrairement sa valeur lorsque la fonction variable $x(t)$ prend une forme déterminée $x_0(t)$ appartenant au champ fonctionnel précédent. Ensuite il suffira de construire une fonction de deux variables $x(t \mid s)$, comprise entre les limites M, N,

égale à $x_0(t)$ pour $s = s_0$, et à $x(t)$ pour $s = s_1$, et ayant sa dérivée par rapport à s finie et continue. On aura

$$F|[x(t)]| - F|[x_0(t)]| = \int_{s_0}^{s_1} ds \int_a^b X|[x(t \overset{b}{\underset{a}{|}} s), \eta]| \frac{dx(\eta \mid s)}{ds} d\eta.$$

La valeur ainsi trouvée pour $F|[x(t)]|$ étant, d'après la formule (12) et la relation (13), indépendante de la fonction $x(t \mid s)$ utilisée pour passer de $x_0(t)$ à $x(t)$.

Ceci montre bien l'intérêt de la généralisation de la formule de Stokes. On peut même aller plus loin : on peut faire dépendre toute la théorie de Lie-Mayer de la formule de Stokes. Cette théorie s'étendra donc aux fonctions de ligne.



CHAPITRE III.

LA THÉORIE DES FONCTIONS DE LIGNES ET LE CALCUL DES VARIATIONS.

1-2. Nouvel exemple de théorie qui s'étend aux fonctions de lignes : la théorie des fonctions implicites. — 3. Les problèmes de variations conduisent à des fonctions de lignes implicites : cas du calcul des variations ordinaires. — 4-5. Exemples de problèmes de calcul des variations conduisant à des équations intégrales ou intégro-différentielles. — 6-7. Nouvel ordre d'idées : les résultats de Hamilton-Jacobi sur les équations de la Mécanique. — 8. Nécessité, pour l'extension de ces résultats aux systèmes à infini degrés de liberté, de la considération des fonctions de lignes. Exemples.

---

1. Nous avons considéré jusqu'ici des quantités qui dépendaient de toutes les valeurs *d'une fonction d'une variable*. C'était pour étudier d'abord le cas le plus simple. Mais il est bien évident que nous pourrons, d'une manière tout à fait analogue, étudier des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de *deux ou plus de deux fonctions d'une variable* et aussi des quantités qui dépendent de toutes les valeurs *d'une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables*.

Pour parler le langage géométrique, nous avons envisagé les fonctions d'une ligne plane; nous pourrons aussi envisager, par exemple, les fonctions d'une ligne gauche de l'espace, ou les fonctions d'une *surface*, etc.

Soit, pour fixer les idées, la fonction d'une surface

$$F|[z(x,y)]|;$$

sous des conditions analogues aux conditions I à IV du Chapitre précédent (n° 2), on définira une dérivée première

$$F'|[z(x,y);\xi,\eta]|$$

dépendant de deux paramètres ξ, η qui individualisent le point de

la surface où l'on fait la dérivation, une dérivée seconde

$$F''|[z(x, z); \xi, \eta; \xi', \eta']|$$

dépendant de deux couples de paramètres, et ainsi de suite. Le principe de *l'inversion de l'ordre de dérivation* s'exprimera ainsi :

$$F''|[z(x,y); \xi, \eta; \xi', \eta']| = F''|[z(x,y); \xi', \eta'; \xi, \eta]|.$$

2. Ces concepts généraux étant posés, un grand nombre de problèmes se présentent à leur sujet. Nous avons déjà dit qu'en général, à tout problème de la théorie des fonctions ordinaires correspondra par un passage du fini à l'infini, du discontinu au continu, un problème de notre nouvelle théorie.

Donnons-en un nouvel exemple : la théorie des fonctions implicites.

On sait que les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \end{cases}$$

permettent de définir $y_1, y_2, \ldots, y_n$ comme des fonctions implicites de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, si le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

est différent de zéro.

Le problème correspondant de la théorie des fonctions de lignes sera du type suivant : *soit l'équation*

$$(2)\qquad F|[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}}, \overset{b'}{\underset{a'}{\varphi(x)}}, \xi]| = 0,$$

on se propose de déterminer $f(x)$, $\varphi(x)$ étant donnée.

Le problème de la résolution des équations algébriques et en particulier linéaires n'est qu'un des problèmes particuliers relatifs aux systèmes de forme (1). Il lui correspondra une classe importante de problèmes renfermés dans des équations du type (2) et en particulier la résolution des équations intégrales linéaires. Mais les équations de la forme (2) peuvent présenter une bien plus grande

multiplicité de types, car on peut supposer, par exemple, que F dépende d'une manière spéciale des valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées en certains points.

Nous consacrerons un Chapitre spécial à l'examen général de ces équations (2) et à la méthode générale de les traiter en partant toujours du *passage du fini à l'infini*. Montrons dans ce Chapitre comment les problèmes de calcul des variations conduisent à des équations de forme (2).

3. Soit la fonction de ligne

$$F|[f\overset{b}{\underset{a}{(}}x)]|,$$

nous avons en général

$$\delta F = \int_a^b F'|[f\overset{b}{\underset{a}{(}}x), \xi]|\,\delta f(\xi)\,d\xi + A,$$

A désignant des termes qui dépendent des points exceptionnels.

Cherchons à déterminer $f(x)$ de façon que δF soit nul quel que soit δf : il faudra que

$$F'|[f\overset{b}{\underset{a}{(}}x), \xi]| = 0,$$

équation en $f(x)$ qui est de la forme (2).

Il pourra arriver que F′ dépende d'une manière spéciale de $f(x)$ en certains points de l'intervalle ab, et ne dépende pas de toutes les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle ab. C'est le cas du calcul des variations ordinaires : on y considère l'intégrale (¹)

$$F|[f\overset{b}{\underset{a}{(}}x)]| = \int_a^b \varphi[f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x), x]\,dx,$$

alors

$$\delta F = \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial f'} + \ldots\right)_{x=\xi} \delta f(\xi)\,d\xi + A,$$

et pour que δF soit nul, il faut que

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial f'} + \ldots\right)_{x=\xi} = 0,$$

(¹) *Cf.* Chapitre II, n° 6.

équation qui est bien du type annoncé. C'est une équation différentielle en $f(x)$.

4. Mais d'autres problèmes de variations nous conduiront à des équations intégrales. Posons

$$(3)\qquad F = \int_a^b \varphi(\xi_1) f(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_a^b \int_a^b \varphi(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1) f(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

on a

$$\begin{aligned} \delta F = {} & \int_a^b \varphi(\xi_1)\, \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_a^b \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 \int_a^b \varphi(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2)\, d\xi_2 \\ & + \int_a^b \delta f(\xi_2)\, d\xi_2 \int_a^b \varphi(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1)\, d\xi_1 \\ = {} & \int_a^b \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 \left\{ \varphi(\xi_1) + \int_a^b [\varphi(\xi_1, \xi_2) + \varphi(\xi_2, \xi_1)] f(\xi_2)\, d\xi_2 \right\} \end{aligned}$$

et, pour que δF soit nul quel que soit δf, il faut que

$$(4)\qquad \varphi(\xi_1) + \int_a^b \psi(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2)\, d\xi_2 = 0,$$

avec

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2) + \varphi(\xi_2, \xi_1);$$

pour calculer $f(x)$ il faut donc résoudre une équation intégrale de première espèce à noyau $\psi(\xi_1, \xi_2)$ symétrique.

J'ai montré dans un Mémoire de 1884 comment on pouvait la traiter en partant du problème de calcul des variations dont elle avait été déduite.

5. Si nous ajoutons à la fonction F précédente (3) l'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{2} f^2(\xi_1)\, d\xi_1,$$

nous trouverons, au lieu de l'équation (4), l'équation

$$\varphi(\xi_1) = f(\xi_1) + \int_a^b f(\xi_2) \psi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 = 0,$$

équation linéaire intégrale de deuxième espèce à noyau symétrique.

Si plus généralement nous considérons des expressions de forme

$$F = \int_a^b \varphi[f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots, x]\, dx$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \varphi[f(x_1), f(x_2), f'(x_1), f'(x_2), \ldots]\, dx_1\, dx_2,$$

nous obtiendrons des équations en $f(x)$ qui auront à la fois le type intégral et le type différentiel et que nous nommerons pour cela *équations intégro-différentielles* (1).

Il est enfin aisé de voir que toutes ces considérations s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables : soit, par exemple, une fonction $\varphi(x, y, t)$ de trois variables (dans la suite nous n'écrirons pas les variables x, y pour abréger). Posons

$$F = \int_a^b dt \int_\sigma \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial y}\right]^2 d\sigma$$
$$+ \int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 \int_\sigma \left[\frac{\partial\varphi(t_1)}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi(t_2)}{\partial x}\, p(t_1, t_2)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\varphi(t_1)}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi(t_2)}{\partial y}\, q(t_1, t_2)\right] d\sigma,$$

σ étant une aire du plan des xy. La variation première de F sera

$$\delta F = -2 \int_a^b dt \int \left[\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial y^2}\right] \delta\varphi(t)\, d\sigma$$
$$-2 \int_a^b \int_a^b \int_\sigma \left[\frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial x^2}\, \alpha(t_1, t_2)\, \delta\varphi(t_2)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial y^2}\, \beta(t_1, t_2)\, \delta\varphi(t_2)\right] dt_1\, dt_2\, d\sigma + A,$$

ou

$$-2 \int_a^b dt \int_\sigma \delta\varphi(t) \left\{ \Delta^2\varphi(t) + \int_a^b \left[\frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial x^2}\, \alpha(t_1, t)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial y^2}\, \beta(t_1, t)\right] dt_1 \right\} d\sigma + A,$$

avec

$$\alpha(t_1, t_2) = \frac{p(t_1, t_2) + p(t_2, t_1)}{2}, \qquad \beta(t_1, t_2) = \frac{q(t_1, t_2) + q(t_2, t_1)}{2},$$

(1) J'ai introduit la dénomination d'*équations intégro-différentielles* dans ma première Note consacrée à ce sujet. *Cf.* VOLTERRA, *Leincei Rend.*, 1909, 1er semestre, p 167.

A désignant l'expression

$$2\int_a^b dt \int_s \delta\varphi(t)\left\{\frac{\partial\varphi(t)}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi(t)}{\partial y}dx + \int_a^b \left[\alpha(t_1, t)\frac{\partial\varphi(t_1)}{\partial x}dy - \beta(t_1, t)\frac{\partial\varphi(t_1)}{\partial y}dx\right]dt_1\right\}$$

qui ne dépend que des valeurs de $\delta\varphi$ au contour s de l'aire σ. Pour que cette variation première soit nulle, quel que soit $\delta\varphi(t)$, il faut que $\varphi(t)$ vérifie l'équation intégro-différentielle :

$$\Delta^2\varphi(t) + \int_a^b \left[\frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial x^2}\alpha(t_1, t) + \frac{\partial^2\varphi(t_1)}{\partial y^2}\beta(t_1, t)\right]dt_1 = 0.$$

6. Nous allons montrer maintenant qu'au calcul des variations se rattachent aussi d'autres problèmes d'un type différent, qu'il est nécessaire d'étudier pour bien des questions de Mécanique et de Physique.

Il existe en Mécanique un principe fort important, le principe de Hamilton, qui permet de réduire les problèmes de la Mécanique à des problèmes de Calcul des Variations. Cela se rattache au fond à la conception générale de Lagrange. Ce principe peut s'appeler principe de *l'action stationnaire*.

Mais à ce principe s'est ajouté celui de *l'action variée* qui a conduit aux résultats de Hamilton et Jacobi.

Ce second principe s'applique à un système mécanique qui a un nombre *fini* de degrés de liberté, c'est-à-dire tel que son mouvement dépende d'un nombre fini de paramètres q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Si

$$T(q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) \quad \text{et} \quad P(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

représentent alors respectivement la force vive et le potentiel, l'action hamiltonienne est l'intégrale simple

$$\int_{t_0}^{t} (T + P)\, dt,$$

où t représente le temps.

En général, le second principe et les résultats de Hamilton-Jacobi s'appliqueront non seulement aux problèmes de Mécanique,

mais encore à tous ceux qui dépendent d'une intégrale

$$\int_{x_0}^{x} V\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}, x\right) dx$$

dont on annule la variation.

Il est très intéressant d'étendre les mêmes considérations aux problèmes qui dépendent de l'extrêmum d'une intégrale multiple. On sait, en effet, qu'il est utile de ramener toute question naturelle à des principes de maximum ou minimum; que c'est en tout cas, comme nous l'avons fait remarquer dans la première conférence, une tendance générale. D'autre part, pour passer d'un système ayant un nombre fini de degrés de liberté à un système en ayant une infinité, il faudra remplacer les sommes par des intégrales. Les problèmes de la Physique mathématique seront donc des problèmes d'extrêmum relatifs à des intégrales multiples, et c'est pourquoi il y a un grand intérêt à étendre la théorie de Hamilton-Jacobi aux intégrales multiples.

Nous verrons tout à l'heure quelle difficulté se présente et comment dans cette extension il est nécessaire de considérer des fonctions de lignes. Nous allons tout d'abord rappeler la théorie classique sous sa forme la plus simple.

7. En posant

$$(5)\qquad F = \int_{x_0}^{x} V\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}, x\right) dx$$

et

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1, \qquad \ldots \qquad \frac{dy_n}{dx} = y'_n,$$

nous avons

$$(6)\quad \delta F = \left(\frac{\partial V}{\partial y'_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y'_n}\delta y_n\right)_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'_1}\right)\delta y_1 + \ldots\right] dx.$$

Pour que δF soit identiquement nul, il faut tout d'abord vérifier les équations différentielles

$$(7)\qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'_i} = 0, \qquad \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons intégré ce système du second ordre et soit sa solution générale

$$(8) \qquad y_i = y_i(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1'^0, \ldots, y_n'^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1'^0, \ldots, y_n'^0$ sont les valeurs initiales de $y_1, \ldots, y_n$, $y_1', \ldots, y_n'$ en $x = x_0$.

F devient alors une fonction

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1'^0, \ldots, y_n'^0)$$

ou, si l'on peut éliminer les $y_i'^0$ à l'aide des équations (8), ce que nous supposerons, une fonction

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1, \ldots, y_n).$$

Sa variation pourra s'écrire, en tenant compte de la formule (6),

$$\delta F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i^0} \delta y_i^0 + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i = \sum \frac{\partial V}{\partial y_i'} \delta y_i - \sum \left(\frac{\partial V}{\partial y_i'}\right)_0 \delta y_i^0,$$

d'où les relations

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y_i^0} = -\left(\frac{\partial V}{\partial y_i'}\right)_0.$$

En posant

$$\frac{\partial V}{\partial y_i'} = p_i(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1, \ldots, y_n),$$

on a évidemment

$$(10) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial y_n} = \frac{\partial p_n}{\partial y_i},$$

formule de réciprocité qui fut utilisée par Helmholtz, Lord Rayleigh et d'autres auteurs.

D'autre part, en dérivant F par rapport à x, et en remarquant que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des fonctions de x, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x} = V,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial F}{\partial x} = V - \sum \frac{\partial V}{\partial y_i'} y_i' = H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'),$$

et si des équations (9) on tire $y'_1, \ldots, y'_n$, on obtient

(11) $$\frac{\partial F}{\partial x} = H\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n}\right).$$

F satisfait donc à une équation aux dérivées partielles qu'on saura intégrer si l'on a intégré les équations différentielles (7). Inversement enfin, si l'on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles, on pourra par des différentiations obtenir l'intégrale générale du système (7).

8. Nous allons étudier l'extension de cette théorie aux intégrales doubles. La difficulté que j'annonçais tout à l'heure est la suivante : nous avons dû, dans le paragraphe précédent, considérer F comme une fonction de la limite supérieure d'intégration. Dans le cas des intégrales doubles, les limites d'intégration sont des lignes; il faudra donc envisager des fonctions de lignes.

On a déjà travaillé sur ce sujet, je signale mon travail de 1890 [1] et les travaux intéressants de M. Fréchet [2]. Je me bornerai ici à étudier de nouveaux cas très simples.

Soit l'intégrale

(5') $$F = \frac{1}{2}\int\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

(f étant une fonction de x et y) étendue à une aire σ du plan des x, y limitée par un contour $\mathfrak{L}$. Nous nommerons s l'arc du contour. En calculant sa variation première il vient

(6') $$\delta F = \int_{\mathfrak{L}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial f}{\partial y}\cos ny\right) \delta f\, ds + \int\int_\sigma \Delta^2 f\, \delta f\, dx\, dy.$$

Prenons pour f une intégrale de l'équation

(7') $$\Delta^2 f = 0,$$

cette intégrale est déterminée par ses valeurs au contour $f_0(s)$. On doit donc considérer F comme une fonction de ces valeurs au

(1) *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni* (*Lincei Rend.*, 1890, 1er semestre, p. 127).

(2) *Extension de la théorie de Jacobi-Hamilton* (*Annali di Matematica*, 3e série, t. XI, p. 187).

contour et du contour $\mathcal{L}$ lui-même :

$$F|[f_0(s), \mathcal{L}]|,$$

et, en laissant $\mathcal{L}$ constant, on tire de (6')

$$\delta F = \int_s \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(ny) \right] \delta f \, ds,$$

d'où

$$(9') \qquad F'_{f_0}|[f_0, \mathcal{L}, s]| = \frac{\partial f}{\partial n} = f_n,$$

formule dont on peut déduire un théorème de réciprocité analogue à (10) : en effet, f_n est une fonction

$$f_n|[f_0, \mathcal{L}, s]|,$$

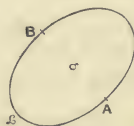
et en la dérivant par rapport à f_0, on obtient

$$(10') \qquad f'_n|[f_0, \mathcal{L}, s, s_1]| = f'_n|[f_0, \mathcal{L}, s_1, s]|,$$

formule où la seconde variable est toujours la variable de dérivation.

En d'autres termes, modifions infiniment peu les valeurs au contour de f dans un domaine infiniment petit autour du point A,

Fig. 5.



la dérivée normale de la fonction harmonique f subira une variation en tous les points du contour, en particulier en B. Si nous effectuons ensuite en B la modification des valeurs au contour que nous produisions en A, la variation de la dérivée normale en A sera ce qu'elle était primitivement en B.

En considérant maintenant F comme une fonction de la ligne qui forme le contour et en modifiant cette ligne sans changer les valeurs au contour, on obtient

$$F'_{\mathcal{L}}|[f_0, \mathcal{L}, s]| + F'_{f_0} \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right],$$

c'est-à-dire

$$F'_{\mathfrak{L}}|[f_0, \mathfrak{L}, s]| + \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2\right],$$

d'où enfin

$$(11') \qquad F'_{\mathfrak{L}}|[f_0, \mathfrak{L}, s]| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{2} F'^2_{f_0}|[f_0, \mathfrak{L}, s]|;$$

c'est l'équation analogue à celle de Jacobi. On pourrait étudier encore un autre principe de réciprocité correspondant à deux dérivations par rapport à $\mathfrak{L}$ et f_0.

On peut développer à propos de l'intégrale

$$(5'_1) \qquad F = \int\int_\sigma \mathfrak{F}(f, f_1, f_2 \mid x, y)\, dx\, dy$$

avec

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

[dont (5') n'est qu'un cas particulier] une théorie analogue. Il vient

$$(6'_1) \qquad \delta F = \int_{\mathfrak{L}} N\, \delta f\, ds + \int\int_\sigma \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_2}\right)\delta f\, d\sigma$$

avec

$$N = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_1}\cos nx + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_2}\cos ny.$$

Dans tout domaine où l'équation

$$(7'_1) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f_2} = 0$$

jouit la propriété fondamentale de (7') : une de ses intégrales est individualisée dans une aire par ses valeurs au contour de cette aire, on pourra considérer F comme une fonction

$$F|[f_0, \mathfrak{L}]|$$

et prouver, comme précédemment, que

$$(9'_1) \qquad F'_{f_0}|[f_0, \mathfrak{L}, s]| = N|[f_0, \mathfrak{L}, s]|.$$

On en déduira le théorème de réciprocité

$$(10'_1) \qquad N'_{f_0}|[f_0, \mathfrak{L}, s, s_1]| = N'_{f_0}|[f_0, \mathfrak{L}, s_1, s]|.$$

F satisfait d'autre part à l'équation

$$F'_{\mathfrak{L}} + F'_{f_0}\frac{df}{dn} = F$$

qui, si on y remplace $\frac{df}{dn}$ par sa valeur

$$f_1 \cos nx + f_2 \cos ny,$$

et f_1 et f_2 par les valeurs tirées des équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial f_1}\cos nx + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial f_2}\cos ny = F'_{f_0}, \\ f_1\cos ny - f_2\cos nx = \dfrac{df}{ds}, \end{cases}$$

que nous supposerons résolubles, prend la forme

$$(11'_1) \qquad F'_{\mathfrak{L}} = g\left(F'_f, \frac{df}{ds}, F, s\right).$$

Il serait facile de vérifier que le théorème de réciprocité (10′) est équivalent au théorème de Green. Ce théorème est ainsi rattaché à un nouvel ordre de recherches. Et le lien ainsi établi se révèle fécond puisqu'il nous fournit l'extension ($10'_1$) de ce théorème de réciprocité à des équations de type très général ($7'_1$).

Voici un autre exemple simple [1] des mêmes considérations que j'avais indiquées dès le début de mes recherches, en 1890. Les équations aux dérivées partielles

$$(7'') \qquad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{i,s}}, \qquad \sum_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$(i, h, s = 1, 2, 3), \qquad (p_{i,h} = p_{h,i}), \qquad [H = H(p_{2,3}, p_{3,1}, p_{1,2}, x_1, x_2, x_3)],$$

analogues aux équations canoniques de la mécanique, s'obtiennent en annulant la variation de l'intégrale

$$(5'') \qquad \iint\left[\sum p_{i,h}\frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} - H\right] du\, dv.$$

Soient d'autre part ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 trois fonctions telles que

$$\frac{\partial\varpi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varpi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varpi_3}{\partial x_3} = 0.$$

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Lectures delivered at the Clark University*, p. 12.

L'intégrale

$$W = \int_\sigma \varpi_1\, dx_2\, dx_3 + \varpi_2\, dx_3\, dx_1 + \varpi_3\, dx_1\, dx_2,$$

étendue à une surface σ, ne dépend que de la ligne s qui forme le contour de σ. Posons enfin

$$\varpi_1 = \frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \qquad \varpi_2 = \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \qquad \varpi_3 = \frac{dW}{d(x_1, x_2)}.$$

Entre les équations (7″) et l'équation

$$(11'') \quad H\left[\frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \frac{dW}{d(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right] + h = 0,$$

il y a les mêmes relations qu'entre les équations canoniques et l'équation aux dérivées partielles de Jacobi (11).

Nous avons envisagé des cas très particuliers mais suffisants, je crois, pour indiquer nettement la marche à suivre même dans des cas bien plus généraux, par exemple celui des équations de l'équilibre ou des vibrations des solides élastiques.

Les équations telles que (11′) ou (11″) ne sont ni des équations intégrales, ni même des équations intégro-différentielles. J'ai commencé à en rencontrer dans mes premières études sur les fonctions de lignes en 1890. M. Hadamard en a rencontré ensuite et a approfondi leur étude d'une manière fort intéressante. M. Paul Lévy, dans une remarquable Thèse [1], les a étudiées d'une façon systématique. Je propose, d'accord avec M. Hadamard, de les appeler *équations aux dérivées fonctionnelles*.

[1] *Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes.* Gauthier-Villars, 1911.



CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS DE LIGNES IMPLICITES.

1-2. Cas particulier des fonctions définies par une équation intégrale transcendante. — 3. Par une équation intégrale linéaire à limites constantes (équation de Fredholm), à limites variables (équation de Volterra). — 4-6. Résolution de l'équation de Volterra considérée comme cas limite d'un système d'équations linéaires ordinaires. — 7. Résolution des équations intégrales du type transcendant. — 8. Extension de la notion de déterminant fonctionnel. — 9-10. Cas général des fonctions de lignes implicites. — 11. Extension de la théorie des parenthèses de Poisson et du théorème de Jacobi sur les fonctions en involution.

---

1. Nous avons expliqué précédemment (Chap. III, n° 2) comment le problème général des fonctions de lignes implicites : résolution de l'équation

$$F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f(x)}},\ \overset{b'}{\underset{a'}{\varphi(x)}},\ \xi]\,|=0 \tag{1}$$

par rapport à $f(x)$, pouvait être considéré comme un cas limite de problème ordinaire des fonctions implicites : résolution du système

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_m)=0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ x_1\ x_2, \ldots, x_m)=0, \end{array}\right. \tag{2}$$

par rapport aux y.

C'est ce problème général (1) qui va maintenant nous occuper.

2. Nous traiterons d'abord les cas les plus simples. On peut tout d'abord supposer que la fonction F est la somme de deux termes dépendant l'un seulement de f, l'autre seulement de φ, et respectivement développables en série du type de Taylor, séparé-

ment par rapport à f et φ; l'équation (1) s'écrit alors

$$f(x)+\int_a^b f(\xi)\,\mathfrak{F}(x,\xi)\,d\xi+\int_a^b\int_a^b f(\xi_1)\,f(\xi_2)\,\mathfrak{F}(x,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots,$$

$$=\varphi(x)+\int_a^b \varphi(\xi)\,\Phi(x,\xi)\,d\xi+\int_a^b\int_a^b \varphi(\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,\Phi(x,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots,$$

où, puisque $\varphi(x)$ est connue,

$$(3)\qquad f(x)+\int_a^b f(\xi)\,\mathfrak{F}(x,\xi)\,d\xi + \int_a^b\int_a^b f(\xi_1)f(\xi_2)\,\mathfrak{F}(x,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots=\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction connue.

La résolution de l'équation (3) peut être considérée comme correspondant à celle d'un système d'équations transcendantes ordinaires.

3. Une équation (3) particulièrement simple sera *l'équation linéaire*

$$(4)\qquad f(x)+\int_a^b f(\xi)\,\mathfrak{F}(x,\xi)\,d\xi=\psi(x).$$

Nous la simplifierons encore en supposant que la limite supérieure d'intégration est égale à x. Ceci revient à admettre que

$$\mathfrak{F}(x,\xi)=0 \qquad \text{pour } \xi>x.$$

L'équation ainsi obtenue s'écrit

$$(5)\qquad f(x)+\int_a^x f(\xi)\,\mathfrak{F}(x,\xi)\,d\xi=\psi(x).$$

C'est une équation intégrale linéaire de deuxième espèce à une limite variable. Nous allons maintenant la résoudre.

4. Pour cela, nous reviendrons à la conception générale qui est le point de départ de toutes ces recherches, c'est-à-dire que nous

regarderons l'équation (5) comme cas limite d'un système d'équations ordinaires, linéaires dans le cas qui nous occupe ([1]).

En divisant l'intervalle a, b en n parties $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs de x comprises dans ces intervalles, le système d'équations ordinaires sera

$$\begin{aligned}
\psi(x_1) &= f(x_1),\\
\psi(x_2) &= f(x_1)\mathfrak{F}(x_2, x_1)h_1 + f(x_2),\\
\psi(x_3) &= f(x_1)\mathfrak{F}(x_3, x_1)h_1 + f(x_2)\mathfrak{F}(x_3, x_2)h_2 + f(x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi(x_n) &= f(x_1)\mathfrak{F}(x_n, x_1)h_1 + \ldots + f(x_{n-1})\mathfrak{F}(x_n, x_{n-1})h_{n-1} + f(x_n),
\end{aligned}$$

ou en posant

$$\mathfrak{F}(x_i, x_s)h_s = a_{i,s},$$

$$\begin{aligned}
\psi(x_1) &= f(x_1),\\
\psi(x_2) &= a_{2,1}f(x_1) + f(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\psi(x_n) &= a_{n,1}f(x_1) + a_{n,2}f(x_2) + \ldots + f(x_n),
\end{aligned}$$

soit

$$(a) \qquad \psi(x_i) = f(x_i) + \sum_{1}^{i-1}{}_s\, a_{is}f(x_s).$$

La simplification que l'on a introduite en remplaçant la limite d'intégration constante b par x, consiste dans ce fait que le déterminant du système (a) est égal à 1. Le système (a) se résout donc très simplement par rapport aux $f(x_s)$ et l'on a

$$f(x_s) = \begin{vmatrix}
1, & 0, & 0, & \ldots & \psi(x_1)\\
a_{21}, & 1, & 0, & \ldots & \psi(x_2)\\
a_{31}, & a_{32}, & 1, & \ldots & \psi(x_3)\\
\ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots\ldots\\
a_{s1}, & a_{s2}, & . & \ldots & \psi(x_s)
\end{vmatrix} = \psi(x_1)c_{s1} + \psi(x_2)c_{s2} + \ldots + \psi(x_s)$$

ou, en permutant les indices i et s,

$$f(x_i) = \psi(x_i) + \sum_{1}^{i-1}{}_s\, c_{is}\,\psi(x_s)$$

([1]) Comparer *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 40.

avec

$$c_{is} = (-1)^{s+i} \begin{vmatrix} a_{s+1,s}, & 1 & , 0, & \ldots & 0 \\ a_{s+2,s}, & a_{s+2,s+1}, & 1, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{i-1,s}, & a_{i-1,s+1}, & . & \ldots & 1 \\ a_{i,s} & , a_{i,s+1} & , . & \ldots & a_{i,i-1} \end{vmatrix}.$$

Nous allons décomposer le polynome c_{is}, qui est de degré $i-s$, en une somme de polynomes homogènes de degrés $1, 2, 3 \ldots (i-s)$. Nous les appellerons

$$a_{is}^{(1)}, \quad a_{is}^{(2)}, \quad \ldots, \quad a_{is}^{(i-s)}.$$

En développant le déterminant qui donne la valeur de c_{is} par rapport à la dernière ligne, nous trouvons

$$c_{is} = -a_{is} - \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, a_{ir} c_{rs};$$

mais

$$c_{is} = a_{is}^{(1)} + a_{is}^{(2)} + \ldots + a_{is}^{(i-s)},$$

et

$$c_{rs} = a_{rs}^{(1)} + \ldots\ldots\ldots + a_{rs}^{(r-s)}.$$

La formule précédente pourra alors s'écrire

$$c_{is} = -a_{is} - \sum_{s+1}^{i-1} a_{ir} a_{rs}^{(1)} - \sum_{s-1}^{i-1} a_{ir} a_{rs}^{(2)} - \ldots,$$

et en séparant dans c_{is} les termes des différents degrés on aura finalement

$$a_{is}^{(1)} = -a_{is},$$

$$a_{is}^{(2)} = -\sum_{s+1}^{i-1} a_{ir} a_{rs}^{(1)},$$

$$a_{is}^{(i-s)} = -\sum_{i+1}^{s-1} a_{ir} a_{rs}^{(i-s-1)}.$$

En général, on pourra écrire

$$a_{is}^{(h)} = \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, a_{ir}^{(1)} a_{rs}^{(h-1)}$$

et, par une itération très simple, on trouve que l'on a aussi

$$a_{is}^{(h)} = \sum_{s+1}^{i-1} {}_r \, a_{ir}^{(k)} a_{rs}^{(h-k)},$$

autre formule récurrente pour calculer les $a_{is}^{(h)}$.

En résumé, les formules algébriques que nous avons trouvées pour la résolution du système (a) sont

$$(a) \qquad \psi(x_i) = f(x_i) + \sum_{1}^{i-1} {}_s \, a_{is} f(x_s),$$

$$(b) \qquad a_{is}^{(1)} = -a_{is},$$

$$(c) \qquad a_{is}^{(h)} = \sum_{s+1}^{i-1} {}_r \, a_{ir}^{(k)} a_{rs}^{(h-k)},$$

$$(d) \qquad c_{is} = \sum_{1}^{i-s} {}_k \, a_{is}^{(k)},$$

$$(e) \qquad c_{is} + a_{is} = -\sum_{s+1}^{i-1} a_{ir} c_{rs},$$

$$(f) \qquad f(x_i) = \psi(x_i) + \sum_{1}^{i-1} c_{is} \psi(x_s).$$

Mais, si nous résolvons le système (f) par rapport aux $\psi(x_i)$, nous devons retrouver le système (a). On peut donc écrire toutes les formules déduites des précédentes par permutation des lettres a et c, soit

$$(a') \qquad f(x_i) = \psi(x_i) + \sum_{1}^{i-1} {}_s \, c_{is} \psi(x_s),$$

$$(b') \qquad c_{is}^{(1)} = -c_{is},$$

$$(c') \qquad c_{is}^{(h)} = \sum_{s+1}^{i-1} c_{ir}^{(k)} c_{rs}^{(h-k)},$$

$$(d') \qquad a_{is} = \sum_{1}^{i-s} {}_k \, c_{is}^{(k)},$$

$$(e') \qquad a_{is} + c_{is} = -\sum_{s+1}^{i-1} c_{ir} a_{rs},$$

$$(f') \qquad \psi(x_i) = f(x_i) + \sum_{1}^{i-1} a_{is} f(x_s).$$

Ceci posé, il faut passer du fini à l'infini, en faisant tendre vers zéro les intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots, h_n$, leur nombre augmentant indéfiniment. A la limite, les sommes qui entrent dans les formules précédentes deviennent soit des intégrales, soit des séries infinies, il faut remplacer les deux indices i et s par les valeurs de deux variables x, ξ, et l'on constate que les deux systèmes de formules précédents se transforment dans les suivants :

$$\text{(A)} \qquad \psi(x) = f(x) + \int_0^x \mathfrak{F}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{F}^{(1)}(x, \xi) = -\,\mathfrak{F}(x, \xi),$$

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{F}^{(h)}(x, \xi) = \int_\xi^x \mathfrak{F}^{(k)}(x, \eta)\, \mathfrak{F}^{(h-k)}(\eta, \xi)\, d\eta,$$

$$\text{(D)} \qquad \Psi(x, \xi) = \sum_1^\infty {}_k\, \mathfrak{F}^{(k)}(x, \xi),$$

$$\text{(E)} \qquad \mathfrak{F}(x, \xi) + \Psi(x, \xi) = -\int_\xi^x \mathfrak{F}(x, \eta)\, \Psi(\eta, \xi)\, d\eta,$$

$$\text{(F)} \qquad f(x) = \psi(x) + \int_0^x \Psi(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi$$

et

$$\text{(A')} \qquad f(x) = \psi(x) + \int_0^x \Psi(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\text{(B')} \qquad \Psi^{(1)}(x, \xi) = -\,\Psi(x, \xi),$$

$$\text{(C')} \qquad \Psi^{(h)}(x, \xi) = \int_\xi^x \Psi^{(k)}(x, \eta)\, \Psi^{(h-k)}(\eta, \xi)\, d\eta,$$

$$\text{(D')} \qquad \mathfrak{F}(x, \xi) = \sum_1^\infty \Psi^{(k)}(x, \xi),$$

$$\text{(E')} \qquad \mathfrak{F}(x, \xi) + \Psi(x, \xi) = -\int_\xi^x \Psi(x, \eta)\, \mathfrak{F}(\eta, \xi)\, d\xi,$$

$$\text{(F')} \qquad \psi(x) = f(x) + \int_0^x \mathfrak{F}(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi;$$

formules qui, si elles sont reconnues exactes, donneront la solution complète du problème que nous nous étions posé : résolution de l'équation intégrale (A).

On les démontre très aisément. D'abord la série (D) est convergente, car si

$$|\mathfrak{F}(x, \xi)| < M,$$

on a

$$|\mathfrak{F}^{(h)}(x, \xi)| < \frac{M^h (x-\xi)^h}{h!}.$$

On peut ensuite vérifier directement que la formule (F) résout l'équation (A) ([1]).

On peut, au surplus, grouper ces propriétés en trois principes :

1° *Principe de convergence :* la série (D) converge;

2° *Principe de réciprocité :* exprimé par les formules (B), (B'), (C), (C'), (D), (D');

3° *Principe d'inversion :* l'ensemble des formules précédentes Ces principes contiennent toute la théorie de l'équation intégrale.

5. Le cas de l'équation intégrale à limites constantes est moins simple. Dans le système d'équations du premier degré correspondant le déterminant dénominateur n'est pas l'unité et il faut alors calculer les deux déterminants numérateur et dénominateur qui, à la limite, deviennent des déterminants infinis. C'est le cas qui a été étudié par M. Fredholm : si le déterminant dénominateur ([2]) n'est pas nul, la solution est donnée par le rapport des deux déterminants; on peut établir, dans ce cas, trois principes analogues aux précédents et résoudre la question par leur application.

Je ne développerai pas ce cas ([3]) et je ne m'occuperai pas non plus de l'équation intégrale de première espèce

$$\int_a^x f(\xi)\,\mathfrak{F}(x, \xi)\,d\xi = \psi(x)$$

que l'on peut, soit ramener à une équation de deuxième espèce par une dérivation, ou une intégration par parties, soit traiter directement par les déterminants. Je pense avoir donné une idée

---

([1]) Pour le détail de la démonstration, voir *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 45-52.

([2]) Que l'on nomme simplement *déterminant de l'équation intégrale.*

([3]) Pour toutes ces questions je renvoie le lecteur à mon premier volume déjà cité : *Leçons sur les équations intégrales* etc.

assez claire du principe du calcul par le cas que j'ai développé ([1]).

6. Je ferai une seule remarque : nous avons vu apparaître, dans les calculs que nous avons fait, le type d'opération suivant

$$\int_{\xi}^{x} \mathfrak{F}(x, \eta)\, \mathfrak{F}(\eta, \xi)\, d\eta.$$

C'est une opération que nous étudierons en détail dans la suite de ce cours et que nous appellerons *l'opération de composition*.

7. Nous allons maintenant nous occuper de cas plus compliqués et tout d'abord de la résolution de l'équation (3) du n° 2. Dans la théorie ordinaire des fonctions implicites, pour passer de la résolution d'un système d'équations linéaires à des cas plus généraux, on peut faire usage, si l'on étudie la question au point de vue de la théorie des fonctions analytiques, de la méthode des développements en série de puissances : nous utiliserons ici une méthode analogue ([2]). Pour cela, nous remplacerons l'équation (3) par

$$(3')\quad \theta\,\psi(x) = \varepsilon f(x) + \varepsilon \int_a^b f(\xi_1)\, \mathfrak{F}(x, \xi_1)\, d\xi_1 + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \int_a^b \int_a^b \mathfrak{F}(x, \xi_1, \xi_2) f(\xi_1) f(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 + \ldots,$$

qui se réduit à (3) pour $\varepsilon = \theta = 1$ et nous essayerons de développer $\varepsilon f(x)$ en puissance de θ.

On peut prendre

$$\varepsilon f(x) = 0 \qquad \text{pour } \theta = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(\varepsilon f(x))_0 = 0.$$

([1]) Pour l'application des méthodes des approximations successives aux équations intégrales, *voir* : J. Le Roux, *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* (Thèse de doctorat, Paris, 1894 ; *Annales de l'École Normale supérieure*, 1895) ; E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle* (*Comptes rendus*, 2e semestre 1904). *Cf.* aussi l'Ouvrage déjà cité de M. T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*. Paris, 1912, et Bôcher, *An Introduction to the Study of integral equations*, Cambridge University Press, 1909.

([2]) Volterra, *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions* (*Comptes rendus*, 19 mars 1906); pour le détail de la démonstration, voir *Leçons sur les équations intégrales*, etc., p. 135.

En posant ensuite

$$\left\{ \frac{d[\varepsilon f(x)]}{d\theta} \right\}_{\theta=0} = \left[\frac{d(\varepsilon f)}{d\theta} \right]_0,$$
$$\left\{ \frac{d^2[\varepsilon f(x)]}{d^2\theta} \right\}_{\theta=0} = \left[\frac{d^2(\varepsilon f)}{d\theta^2} \right]_0,$$

et ainsi de suite, on tire de l'équation (3′), en la dérivant par rapport à θ et en y faisant $\theta = 0$

$$(6) \qquad \psi(x) = \left[\frac{d(\varepsilon f)}{d\theta} \right]_0 + \int_a^b \left[\frac{d(\varepsilon f)}{d\theta} \right]_0 \mathfrak{F}(x, \xi_1)\, d\xi_1.$$

D'où, si le déterminant de cette équation intégrale linéaire n'est pas nul,

$$(6') \qquad \left[\frac{d(\varepsilon f)}{d\theta} \right]_0 = \psi(x) + \int_a^b \psi(\xi_1)\, \Phi(x, \xi_1)\, d\xi_1.$$

Une nouvelle dérivation de l'équation (3′) donne ensuite

$$0 = \left[\frac{d^2(\varepsilon f)}{d\theta^2} \right]_0 + \int_a^b \left[\frac{d^2(\varepsilon f)}{d\theta^2} \right]_0 \mathfrak{F}(x, \xi_1)\, d\xi_1$$
$$+ \int_a^b \int_a^b \left[\frac{d[\varepsilon f(\xi_1)]}{d\theta} \right]_0 \left[\frac{d[\varepsilon f(\xi_2)]}{d\theta} \right]_0 \mathfrak{F}(x, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

d'où, en tenant compte de la formule (6′),

$$\left[\frac{d^2(\varepsilon f)}{d\theta^2} \right]_0 = \int_a^b \int_a^b \Phi(x, y_1, y_2)\, \psi(y_1)\, \psi(y_2)\, dy_1\, dy_2.$$

On trouve finalement pour $\varepsilon f(x)$ le développement suivant

$$\varepsilon f(x) = \theta\, \psi(x) + \theta \int_a^b \psi(\xi_1)\, \Phi(x, \xi_1)\, d\xi_1$$
$$+ \frac{\theta^2}{1.2} \int_0^b \int_a^b \Phi(x, \xi_1, \xi_2)\, \psi(\xi_1)\, \psi(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 + \ldots.$$

Cette série convergera si $|\psi|$ est suffisamment petit et fournira donc, dans un certain domaine fonctionnel, la solution de l'équation intégrale transcendante (3) par un développement analogue au développement en série de puissances. Il est aisé de voir qu'il n'y a *qu'une seule solution* $f(x)$ qui s'annule avec $\psi(x)$.

8. Il est intéressant de faire ici une remarque.

Différentions les équations (2), nous aurons :

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}dy_n+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial f_n}{\partial y_n}dy_n+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m=0; \end{cases}$$

le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

n'est autre que le déterminant des équations linéaires précédentes par rapport à

$$dy_1, \quad dy_2, \quad \ldots, \quad dy_n.$$

La théorie des fonctions implicites ordinaire nous apprend que si les équations (2) sont satisfaites pour

$$y_1=y_2=\ldots=y_n=x_1=x_2=\ldots=x_m=0,$$

une condition suffisante pour l'existence, dans le domaine de $x_1=0$, $x_2=0$, ... $x_m=0$, de n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s'annulant avec $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et vérifiant le système (2) est que

$$D_0=\left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]_{y_1=y_2=\ldots=y_n=x_1=\ldots=x_m=0}$$

soit différent de zéro.

On a un résultat tout à fait analogue pour l'équation (3) : elle est satisfaite pour $f(x)=\psi(x)=0$. Différentions-la et posons-y ensuite $f(x)=0$, $\psi(x)=0$, il vient

$$(8)\qquad \delta f(\xi)+\int_a^b \mathcal{F}(\xi, \xi_1)\,\delta f(\xi_1)\,d\xi_1=\delta\psi(\xi).$$

D'après les résultats du numéro précédent il est suffisant, pour que l'équation (3) ait une solution unique dans le domaine $\psi(x)=0$ et tendant vers zéro avec $\psi(x)$, que le déterminant de l'équation (8) ne soit pas nul.

9. Nous sommes maintenant en mesure de traiter le cas général : résolution de l'égalité (1). Nous pourrons toujours supposer qu'elle soit satisfaite pour $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ et que $a=a'$, $b=b'$.

Calculons-en la différentielle et admettons qu'elle ait la forme

$$(9)\quad \delta F = \delta f(\xi) + \int_a^b F' | [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi, \xi_1] | \delta f(\xi_1)\, d\xi_1$$

$$+ \int_a^b \Phi | [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi, \xi_1] | \delta \varphi(\xi_1)\, d\xi_1 + A\, \delta\varphi(\xi);$$

faisons-y $f(x) = \varphi(x) = 0$, il vient

$$(9')\qquad \delta F = \delta f(\xi) + \int_a^b \mathcal{G}(\xi, \xi_1) \delta f(\xi_1)\, d\xi_1$$

$$+ \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1) \delta \varphi(\xi_1)\, d\xi_1 + A_0 \delta \varphi(\xi);$$

c'est une équation intégrale en $\delta f(\xi_1)$ dont le déterminant correspond au déterminant des équations (7), c'est-à-dire au déterminant fonctionnel du système (2) calculé pour

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

Si ce déterminant est différent de zéro, on pourra déterminer, dans le domaine fonctionnel de $\varphi(x) = 0$, $f(x)$ comme fonction de toutes les valeurs de $\varphi(x)$. A cet effet, écrivons l'équation (1)

$$(10)\qquad f(\xi) + \int_a^b \mathcal{G}(\xi, \xi_1) f(\xi_1)\, d\xi_1$$

$$= f(\xi) + \int_a^b \mathcal{G}(\xi, \xi_1) f(\xi_1)\, d\xi_1 - F | [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] |.$$

Nommons le second membre de cette équation

$$\Theta | [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] |;$$

Θ sera une quantité telle que, si l'on calcule $\delta\Theta$ pour $\varphi(x)$ constant et égal à zéro et si l'on y fait ensuite

$$f(x) = 0,$$

on ait

$$\delta\Theta = 0.$$

Résolvons alors l'équation (10)

$$f(\xi) + \int_a^b \mathcal{G}(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 = \Theta$$

par rapport à $f(\xi)$ en y considérant le second membre Θ comme connu; cette résolution est possible d'après l'hypothèse du début.

Nous trouvons

$$(10') \qquad f(\xi) = \Omega \left| \left[f\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \varphi\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \xi \right] \right|,$$

Ω étant une quantité jouissant de la même propriété que Θ.

L'équation (10′) se résout dans un domaine fonctionnel autour de $\varphi(x) = 0$ par les approximations successives suivantes

$$f_1(\xi) = \Omega \left| \left[0, \quad \varphi\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \xi \right] \right|,$$

$$f_2(\xi) = \Omega \left| \left[f_1\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \varphi\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \xi \right] \right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(\xi) = \Omega \left| \left[f_{n-1}\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \varphi\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \xi \right] \right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont on étudiera sans difficulté la convergence en posant certaines conditions.

La méthode que nous venons d'indiquer n'est autre que la méthode des approximations successives de M. Picard, telle que M. Goursat l'a utilisée pour la démonstration du théorème des fonctions implicites ([1]).

En résolvant l'équation intégrale

$$\delta F = 0$$

ou

$$\delta f(\xi) + \int_a^b \mathcal{G}(\xi, \xi_1)\, \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1)\, \delta\varphi(\xi_1)\, d\xi_1 + A_0\, \delta\varphi(\xi),$$

on trouvera

$$\delta f(\xi) = A_0\, \delta\varphi(\xi) + \int_a^b \Lambda(\xi, \xi_1)\, \delta\varphi(\xi_1)\, d\xi_1,$$

d'où

$$\left\{ f' \left| \left[\varphi\overset{b}{\underset{a}{(x)}}, \xi, \xi_1 \right] \right| \right\}_{\varphi(x)=0} = \Lambda(\xi, \xi_1).$$

Le lecteur a déjà aperçu le parallélisme profond entre ce dernier calcul et celui des *dérivées des fonctions implicites ordinaires* dont il n'est que l'extension.

10. Ce qui précède n'est qu'un aperçu de la méthode générale à employer pour traiter la question des fonctions de lignes implicites. En effet, nous avons supposé pour simplifier que δF était de la forme (9), ce qui n'est qu'un cas très particulier : si, par

---

([1]) GOURSAT, *Sur la théorie des fonctions implicites* (*Bull. Soc. math.*, 1903, p. 184).

exemple, dans δF le coefficient de $\delta f(\xi)$ n'était pas l'unité, mais une fonction $\lambda(\xi)$, il faudrait, dans les considérations précédentes, remplacer les équations intégrales de deuxième espèce par des équations de M. Picard, de troisième espèce. Si le terme en $\delta f(\xi)$ manquait, il s'introduirait au contraire des équations de première espèce. Toutes ces équations pourraient être à limites variables si dans δF la limite supérieure d'intégration b était égale à ξ : ce dernier cas a été étudié récemment par M. Evans ([1]).

Il pourrait aussi arriver que δF dépende d'une manière spéciale au point ξ de f et de ses dérivées : on aurait alors des équations intégro-différentielles. Il faudrait aussi étudier les cas où, pour la continuité de F, il faut considérer les variations des dérivées de f. Tous ces cas nécessiteraient de longs développements.

Nous n'en parlerons pas, car notre but n'est pas de donner un développement systématique de la théorie, mais seulement un aperçu des méthodes qui pourraient servir à l'étudier dans toute sa généralité.

11. Comme application des considérations précédentes, nous allons indiquer un nouvel exemple de théorie qui s'étend aux fonctions de ligne : c'est la théorie *des parenthèses de Poisson* ([2]).

Soit une relation

$$H\left|\left[f\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \varphi\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \xi\right]\right| = 0,$$

le paramètre ξ étant variable entre les limites a et b. Admettons d'abord, pour simplifier, que

$$\begin{aligned}\delta H = & \int_a^b H'_f\left|\left[f\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \varphi\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \xi, \xi_1\right]\right| \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 \\ & + \int_a^b H'_\varphi\left|\left[f\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \varphi\left(\overset{b}{\underset{a}{x}}\right), \xi, \xi_1\right]\right| \delta \varphi(\xi_1)\, d\xi_1,\end{aligned}$$

nous pouvons considérer une parenthèse analogue à celle de Poisson

$$\begin{aligned}(11)\quad & \Big(H\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi\right]\right|, H\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi'\right]\right|\Big) \\ & = \int_a^b \Big\{ H'_f\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi, \xi_1\right]\right| H'_\varphi\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi', \xi_1\right]\right| \\ & \qquad - H'_f\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi', \xi_1\right]\right| H'_\varphi\left|\left[f(x), \varphi(x), \xi, \xi_1\right]\right| \Big\}\, d\xi_1.\end{aligned}$$

([1]) *Ve Congrès des Mathématiciens* (Cambridge, 1912).

([2]) *Voir* par exemple Goursat, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris, 1891.

Pour ne pas compliquer l'écriture, nous nous dispenserons d'écrire dans l'expression de H les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$. La parenthèse s'écrira donc

$$(\mathrm{H}(\xi),\ \mathrm{H}(\xi')),$$

et il est facile de vérifier que le théorème de Poisson

$$\big((\mathrm{H}(\xi),\ \mathrm{H}(\xi')),\ \mathrm{H}(\xi'')\big) + \big((\mathrm{H}'(\xi'),\ \mathrm{H}(\xi'')),\ \mathrm{H}(\xi)\big) + \big((\mathrm{H}(\xi''),\ \mathrm{H}(\xi)),\ \mathrm{H}(\xi')\big) = 0$$

subsiste.

Le théorème de Jacobi se généralise aussi aisément : supposons qu'on ait maintenant

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{H} = \ & \delta f(\xi) + \int_a^b \mathrm{H}'_f \,|[\, f(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \xi,\ \xi_1]|\, \delta f(\xi_1)\, d\xi_1 \\ & + \delta\varphi(\xi) + \int_a^b \mathrm{H}'_\varphi \,|[\, f(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \xi,\ \xi_1]|\, \delta\varphi(\xi_1)\, d\xi_1,\end{aligned}$$

nous avons démontré qu'alors

$$\mathrm{H} = 0$$

définit en général une fonction implicite

$$f(\xi) = f\,|[\,\varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \xi]|$$

et que l'on a

$$\delta f(\xi) = \delta\varphi(\xi) + \int_a^b f'\,|[\,\varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \xi,\ \xi_1]|\,\delta\varphi(\xi_1)\, d\xi_1.$$

Quelle est la condition pour que

$$\int_a^b f\,|[\,\varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}}),\ \xi]|\,\delta\varphi(\xi)\, d\xi$$

soit la différentielle totale d'une fonction de ligne ? On trouve sans peine l'équation

$$\mathrm{H}'_f(\xi',\xi) - \mathrm{H}'_f(\xi,\xi') + \mathrm{H}'_\varphi(\xi',\xi) - \mathrm{H}'_\varphi(\xi,\xi') + (\mathrm{H}(\xi),\ \mathrm{H}(\xi')) = 0,$$

où la parenthèse représente toujours l'expression (11).



CHAPITRE V.

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU TYPE ELLIPTIQUE.

1. Nous avons vu comment les fonctions de ligne nous amènent à trois catégories d'études :

1° Des problèmes de type algébrique que nous avons étudiés dans la dernière leçon; la résolution des équations intégrales linéaires n'en est qu'un cas particulier, d'ailleurs très important;

2° L'étude des équations intégro-différentielles;

3° L'étude d'équations de nature plus compliquées : les équations aux dérivées fonctionnelles.

Nous allons maintenant aborder l'étude des équations intégro-différentielles.

2. En faire, dès aujourd'hui, une classification serait prématuré. On peut, évidemment, distinguer tout de suite celles où il n'entre que des dérivées ordinaires et celles où il entre des dérivées partielles; mais il serait difficile et un peu vain de faire une étude systématique de tous les types qui peuvent se présenter. Mieux vaut examiner d'abord quelques cas particuliers qui fourniront la marche à suivre pour étudier ensuite des classes générales d'équations.

Il est particulièrement intéressant et utile de considérer d'abord les équations qui se présentent naturellement à cause de quelque question physique ou naturelle qui leur est rattachée. L'histoire nous a toujours montré que c'était ainsi qu'on s'orientait le plus facilement dans les questions nouvelles.

3. Nous étudierons surtout des équations intégro-différentielles aux dérivées partielles. Mais nous aurons aussi à en considérer d'autres aux dérivées ordinaires.

La plus simple et l'une des plus importantes au point de vue de la Physique est l'équation [1]

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right]d\tau=0,$$

$u(x, y, z, t)$ étant la fonction inconnue, que l'on peut prendre comme type des équations intégro-différentielles elliptiques,

De même que l'étude de l'équation de Laplace a fourni la marche à suivre dans l'étude des autres équations *aux dérivées partielles* du type elliptique, de même l'étude de l'équation précédente précède naturellement et prépare celle des équations *intégro-différentielles* elliptiques.

Nous l'écrirons sous une forme plus condensée, en omettant les lettres x, y, z.

$$(1)\quad \Delta^2 u(t)+\int_0^t\left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right]d\tau=0.$$

4. On pourra envisager x, y, z comme les coordonnées d'un point dans un espace à trois dimensions. Soit alors S un domaine de cet espace limité par une surface σ, nous dirons qu'une fonction

$$u(x,y,z,t)$$

est *régulière dans ce domaine pour les valeurs de t comprises entre* o *et* T si, pour ces valeurs de t, elle est finie et continue à l'intérieur du domaine ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à x, y, z.

Nous démontrerons d'abord que : *toute solution régulière u*

---

(1) VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali* (*Rend. dei Lincei*, t. XVIII, 1909, 1er semestre, p. 167), et *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (*Acta mathematica*, t. XXXV, n° 4, p. 299 et suiv.).

de l'équation (1) *est déterminée à l'intérieur de* S *pour les valeurs de t comprises entre* o *et* T *si, pour les mêmes valeurs de t, on se donne ses valeurs sur le contour* σ *de* S.

Il n'est pas inutile d'indiquer la démonstration, car c'est un type de raisonnement qu'on utilisera dans toutes les questions analogues.

La proposition à démontrer revient à la suivante : *toute solution de l'équation* (1) *régulière et nulle sur* σ *pour* $o < t < T$, *est identiquement nulle dans* S *pour les mêmes valeurs de t.*

Pour prouver ce dernier fait, multiplions l'équation (1) par $u(t)$ et intégrons dans S, il vient, après une intégration par parties,

$$(2)\quad \int_S \Delta u(t)\,dS + \int_0^t d\tau \int_S \left[\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z}\frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t,\tau)\right] dS$$
$$= \int_\sigma u(t)\left\{\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left[\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau)\cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t,\tau)\cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t,\tau)\cos nz\right] d\tau\right\} d\sigma = o$$

en posant

$$\Delta u(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

D'où, puisque sur σ on a $u(x) = o$,

$$(2')\quad \int_S \Delta u(t)\,dS + \int_0^t d\tau \int_S \left[\sum \frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau)\right] dS = o.$$

Soit alors M une quantité telle que

$$\int_S \Delta u(t)\,dS < M,$$

puisque

$$\int_S \left[\left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right| - \left|\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\right|\right]^2 dS \geqq o,$$

on a

$$\int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\right| dS < M,$$

et de même

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M,$$

et enfin

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M.$$

Dans ces conditions, si

$$|f(t, \tau)|, \quad |\varphi(t, \tau)|, \quad |\psi(t, \tau)|, \quad < \frac{N}{3},$$

on tire de la relation (2)

$$\int \Delta u(t)\, dS < MNt,$$

donc

$$\int \Delta u(\tau)\, dS < MN\tau.$$

Mais alors de

$$\int_S \left[\left| \sqrt{\tau} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \sqrt{t} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right]^2 dS \geq 0,$$

on déduit

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < MN t^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}},$$

d'où, par nouvelle application de la relation (2),

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{2}{3} MN^2 t^2.$$

En continuant de la même manière, on trouve en général

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{M(2Nt)^{n-1}}{n!}.$$

Le premier membre de cette inégalité doit par conséquent être inférieur à une quantité aussi petite qu'on veut. Il faut donc qu'il soit nul et l'on en conclut évidemment que

$$u(x, y, z, t) = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré [1].

---

[1] De la formule (2) on peut aussi conclure le théorème suivant : Si l'expres-

5. Nous avons maintenant à résoudre le problème de déterminer u par les valeurs qui le définissent.

La méthode à suivre résulte de la fusion de deux procédés fondamentaux :

1° *La méthode de Green*, qui sert à traiter les équations aux dérivées partielles ordinaires du type elliptique;

2° *La méthode fondamentale de passage du fini à l'infini, indispensable pour toute équation du type intégral.*

La méthode de Green comprend deux moments successifs : 1° la démonstration d'un théorème de réciprocité; 2° la détermination d'une solution fondamentale.

Dans le cas typique de l'équation de Laplace, par exemple, on montre d'abord qu'entre deux solutions u et v régulières dans le domaine S on a la relation

$$\int u \frac{dv}{dn} d\sigma = \int v \frac{du}{dn} d\sigma$$

(σ étant la frontière de S et n la normale à σ). C'est le théorème de réciprocité. On envisage ensuite la solution particulière $\frac{1}{r}$, r étant la distance entre un pôle fixe A et un point variable x, y, z, qui constitue la solution fondamentale car elle devient infinie d'ordre -1 au pôle. Le procédé classique de Green donne alors la formule fondamentale qui détermine la valeur de u au pôle par les valeurs de u et de $\frac{du}{dn}$ au contour.

---

sion

$$\frac{du(t)}{dn} + \int_0^t d\tau \left(\sum \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) \cos nx \right)$$

est connue au contour σ, pour

$$0 < t < T,$$

la fonction u est déterminée, à l'intérieur de S, à une constante par rapport à x, y, z, près (*cf.* VOLTERRA, *Acta mathematica, loc. cit.*, p. 301). Dans ce Mémoire le théorème est énoncé en disant : à une constante près. M. Pérès a remarqué que c'est une constante seulement par rapport à x, y, z.

Les deux théorèmes que nous avons ainsi obtenus sont analogues, dans cette théorie, aux théorèmes de détermination d'une fonction harmonique par ses valeurs ou celles de sa dérivée normale à la frontière d'un domaine.

Pour obtenir, ce qui sera notre but désormais, la formule analogue dans le cas de l'équation (1), il faudra commencer par trouver le théorème de réciprocité. Il ne s'obtient pas en combinant deux intégrales u et v de l'équation (1), mais en combinant l'intégrale u de l'équation (1) avec une intégrale v d'une autre équation (1'). Ce n'est pas une difficulté sérieuse et c'est un fait auquel nous sommes habitués : il se rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles (par exemple dans la méthode de Riemann) toutes les fois que l'équation sur laquelle on opère n'est pas sa propre adjointe. Nous savons qu'il faut alors associer à une solution de l'équation une solution de l'équation adjointe.

Ici il se produit un fait analogue et l'équation qui joue le rôle d'équation adjointe est la suivante :

$$(1') \quad \Delta^2 v(t) + \int_t^\theta \left[\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right] d\tau = 0.$$

Si alors nous formons l'expression

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = & \int_0^\theta dt \int_\sigma \left[v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right] d\sigma \\ & + \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left\{ \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right] f(\tau, t) \cos(nx) \right. \\ & \qquad + \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right] \varphi(\tau, t) \cos(ny) \\ & \qquad \left. + \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right] \psi(\tau, t) \cos(nz) \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

σ étant la frontière d'un domaine où u et v sont réguliers et n la normale extérieure à σ, H est une quantité qui dépend de σ, u, v, θ et qu'on peut écrire

$$\mathrm{H}_\sigma | [u, v, \theta] |.$$

Si u et v sont respectivement des solutions régulières de (1) et (1'), on constate que [1]

$$(3) \qquad \mathrm{H}_\sigma | [u, v, \theta] | = 0.$$

L'équation précédente constitue le principe de réciprocité cherché.

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Acta mathematica*, *loc. cit.*, p. 302.

6. Il faut maintenant trouver une fonction fondamentale, c'est-à-dire une fonction qui joue le même rôle que $\frac{1}{r}$ dans l'équation de Laplace.

C'est pour la recherche de cette solution fondamentale qu'il faudra, comme nous l'avons fait déjà dans bien des cas analogues, remplacer l'équation (1) par des systèmes approchés et passer à la limite.

Pour obtenir un de ces systèmes approchés il suffit de diviser l'intervalle o, θ en intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et de remplacer les intégrales par des sommes. On obtient alors le système

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta^2 u_1 = 0, \\ a_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0, \\ a_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

correspondant au système (1) : c'est un système de n équations aux dérivées partielles des n inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$ fonctions de x, y, z.

Le système adjoint à (4) qui correspond à l'équation (1') sera de même

$$(4')\quad \begin{cases} \Delta^2 v_1 + a_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + a_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \ldots = 0 \\ \Delta^2 v_2 + a_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \ldots = 0 \\ \Delta^2 v_3 + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et l'on aurait pu obtenir l'équation de réciprocité (3) directement comme limite d'une équation de réciprocité entre une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (4) et une solution $v_1, v_2, \ldots, v_n$ du système (4') [1].

Mais nous cherchons une solution fondamentale du système (4) ou du système (4'). Prenons, par exemple, le système (4), il n'y

(1) Cf. *Acta mathematica*, *loc.cit.*, p. 304.

aurait pas plus de difficulté à traiter (4'). On peut prendre

$$u_1 = \frac{1}{r},$$

et puisque

$$\frac{1}{2}\Delta^2 r = \frac{1}{r}$$

en prenant

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(a_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

la deuxième équation est satisfaite.

Mais

$$\frac{1}{3.4}\Delta^2 r^3 = r,$$

donc on satisfait la troisième équation en posant

$$\begin{aligned} u_3 = &-\frac{1}{2}\left(a_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{31}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\ &+ \frac{1}{2.3.4}\Bigg[\quad a_{32}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial z^2}\right) \\ &\qquad + b_{32}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial z^2}\right) \\ &\qquad + c_{32}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(a_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 r^3}{\partial z^2}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

et ainsi de suite : on trouve ainsi une solution fondamentale demandée.

Pour le système (4') on trouve, sans plus de peine, qu'on peut prendre

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{r}, \\ v_{n-1} &= -\frac{1}{2}\left(a_{n,n-1}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{n,n-1}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{n,n-1}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right), \\ v_{n-2} &= -\frac{1}{2}\left(a_{n,n-2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{n,n-2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{n,n-2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2.3.4}\left[a_{n-1,n-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a_{n,n-1}\frac{\partial^2 r^3}{\partial x^2} + \ldots\right) + \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Toutes ces fonctions deviennent infinies au pôle du même ordre que $\frac{1}{r}$.

Pour passer des systèmes (4), (4') à (1), (1'), il suffit de passer du fini à l'infini par le procédé indiqué dès le début de ce cours.

Nous allons voir comment il faut passer à la limite pour obtenir la solution fondamentale demandée de l'équation (1').

Désignons par

$$v_n^{(n)}, \quad v_{n-1}^{(n)}, \quad \ldots, \quad v_1^{(n)}$$

la solution (a) du système des n équations $(4')$. Par suite $v_i^{(h)}$ est défini lorsque $h \geqq i$.

Posons

$$v_i^{(h)} = 0 \qquad \text{lorsque} \qquad h < i,$$

alors

$$v_n^{(n-h)}, \quad v_{n-1}^{(n-h)}, \quad \ldots, \quad v_1^{(n-h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sont des solutions du système $(4')$ ainsi que

$$\sum_1^n{}_h v_n^{(h)}, \quad \sum_1^n{}_h v_{n-1}^{(h)}, \quad \ldots, \quad \sum_1^n{}_h v_1^{(h)}.$$

Si nous passons à la limite dans ces dernières solutions on obtient la solution fondamentale de l'équation adjointe $(1')$ que l'on cherche. On peut employer un procédé tout à fait analogue pour l'équation (1).

On trouvera ainsi les expressions des solutions fondamentales de l'équation (1) et de son adjointe $(1')$, expressions qu'on pourra vérifier directement.

Pour l'équation adjointe $(1')$, en posant

$$f(t, \tau) = F_{1,0,0}(t, \tau), \qquad \varphi(t, \tau) = F_{0,1,0}(t, \tau), \qquad \psi(t, \tau) = F_{0,0,1}(t, \tau),$$

$$F_{h,k,l} = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=\rho} F_{h-i,k-j,l-g}(t, \xi)\, F_{i,j,g}(\xi, \tau)\, d\xi$$

et

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!\, 2^{2n}} \sum_{h+k+l=n} F_{h,k,l}(\tau, t) \sum_0^h{}_\beta \sum_0^k{}_\gamma \sum_0^l{}_\nu (-1)^{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$\times \frac{[2(\alpha+\beta+\gamma)]!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!}$$
$$\times \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!},$$

on trouve comme valeur de la solution fondamentale ayant son pôle à l'origine

$$(5) \qquad V(x, y, z \mid t, \theta) = \frac{1}{r}\left[1 + \int_t^\theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\tau\right] \quad (^1).$$

---

(1) *Acta mathematica*, p. 306 et suiv.

7. Ayant le théorème de réciprocité (3) et la solution fondamentale (5) il n'y a aucune difficulté à poursuivre l'application de la méthode de Green.

Remplaçons dans l'équation (3) v par V. Si le pôle de V est extérieur au domaine S, le premier membre de l'équation (3) reste égal à o. Mais si le pôle de V est intérieur à S, ce résultat n'est plus exact, car la formule (3) a été démontrée dans l'hypothèse que v est régulière, tandis que V devient infinie au pôle.

Dans ce cas, si nous retranchons le pôle par une petite sphère ω, nous pouvons écrire

$$H_\sigma |[u, V, \theta]| + H_\omega |[u, V, \theta]| = 0.$$

En faisant diminuer indéfiniment le rayon de la sphère, on constate enfin que [1]

$$\lim H_\omega |[u, V, \theta]| = -4\pi \int_0^\theta u_0(t)\, dt,$$

en posant

$$u_0(t) = u(x_0, y_0, z_0, t),$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du pôle.

Donc

$$4\pi \int_0^\theta u_0(t)\, dt = H_\sigma |[u, V, \theta]|$$

et, par suite,

$$u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma |[u, V, \theta]|. \tag{6}$$

Si w est une solution régulière de l'équation adjointe, on a aussi

$$u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma |[u, V + w, \theta]|. \tag{6'}$$

8. Les formules (6) et (6′) donnent les valeurs de la solution en fonction de ses valeurs et des valeurs de ses dérivées sur la frontière σ. Elles correspondent, relativement à l'équation (1), au théorème de Green dans l'équation de Laplace et l'on en tire des conclusions analogues : si l'on sait choisir la fonction w de manière à annuler $V + w$ sur σ, le second membre de la formule (6′) ne contient plus que les valeurs de u au contour; la formule (6′) résout alors le problème de *déterminer la solution régulière u*

(1) Pour le détail du calcul, voir *Acta mathematica*, p. 313 et suiv.

à l'intérieur de S *pour* $t=\theta$ *par ses valeurs au contour pour* $0 < t < \theta$ [1].

La fonction $V + w$ ainsi déterminée est l'analogue de la *fonction de Green* du problème de Dirichlet. On peut la calculer par la méthode des images quand σ est un plan parallèle à un des plans de coordonnées.

Si nous avions considéré, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \ldots\right] d\tau = \chi(x, y, z, t),$$

en posant

$$\int_0^\theta dt \int_S v(t)\chi(x,y,z,t)\, dS = K|[\chi, v, \theta]|,$$

---

[1] On peut aussi considérer le problème qui pour l'équation (1) est analogue au problème de Neumann : *déterminer la solution u régulière dans* S *par les valeurs au contour de* $\frac{du}{dn} + \int_0^t \sum f(t,\tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\cos nx\, d\tau$ (*cf.* n° 4, note 1). Il y a entre ce problème et le précédent les mêmes différences qu'entre le problème de Neumann et le problème de Dirichlet.

En effet, il est impossible de trouver une fonction w régulière dans S et telle qu'on ait

$$\frac{d(w+V)}{dn} + \int_0^t \left(\sum f(t,\tau)\frac{\partial[w(\tau)+V(\tau)]}{\partial x}\cos nx\right)d\tau = 0$$

sur σ (*cf.* VOLTERRA, *loc. cit.*, p. 318). Il faut remplacer V par

$$V_{AB} = V_A - V_B,$$

V_A et V_B étant les solutions fondamentales relatives à deux pôles A et B du domaine S. Si l'on connaît alors une fonction w telle que

$$\frac{d}{dn}(V_{AB}+w) + \int_0^t \left\{\sum f(t,\tau)\frac{\partial[V_{AB}(\tau)+w(\tau)]}{\partial x}\cos nx\right\}d\tau = 0$$

sur σ, la formule

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}H_\sigma|[u, V_{AB}-w], \theta| = u_A(\theta) - u_B(\theta)$$

donne en fonction des valeurs au contour, pour $0 < t < \theta$, de

$$\frac{du(t)}{dn} + \int_0^t \left(\sum f(t,\tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\cos nx\right)d\tau$$

les différences des valeurs de u aux différents points de S pour $t=\theta$.

nous aurions obtenu

$$u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ H_\sigma|[u, V, \theta]| - K|[\chi, V, \theta]| \right\},$$

formule dont on tire aisément un théorème analogue au théorème de Poisson.

9. Nous avons étudié, dans ce Chapitre, l'équation (1), type des équations intégro-différentielles du type elliptique.

Pour étudier l'équation du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \dots\right] d\tau = 0,$$

ou d'autres équations avec 4 ou en général n variables de dérivation, il n'y aurait pas à faire de modifications bien considérables à l'analyse précédente.

En somme, il n'y a pas grande difficulté à passer du cas elliptique au cas hyperbolique. Au contraire, les équations telles que la variable d'intégration *coïncide avec l'une des variables de dérivation* se traitent de façon tout à fait différente : par exemple l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} - \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau)\right] d\tau = 0.$$

C'est pourtant un cas très intéressant dans les applications, car c'est celui qui se présente dans la théorie des vibrations. Aussi l'étudierons-nous plus tard, mais seulement dans un cas particulier [1] : une étude générale, qu'on pourrait faire, nous entraînerait trop loin.

[1] *Cf.* Chapitre VI, n° 9.



CHAPITRE VI.

LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉLASTICITÉ.

1. Ayant approfondi, dans un cas fondamental, l'étude des équations intégro-différentielles du type elliptique, nous allons passer à d'autres équations du même type qui se présentent en Physique mathématique.

Les plus intéressantes interviennent en théorie de l'élasticité [1]. Nous aurons, dans le dernier Chapitre, à revenir sur les considérations physiques qui s'y rapportent.

Dans ce Chapitre nous allons tout d'abord exposer le problème général de l'élasticité, tel qu'on le pose ordinairement.

La déformation infinitésimale en chaque point d'un milieu continu est déterminée par six éléments. Pour ces éléments on peut prendre les dilatations ou les contractions des arêtes et les variations des angles d'un petit parallélipipède rectangle ayant son centre au point considéré. Si l'on appelle

$$\gamma_{11},\quad \gamma_{22},\quad \gamma_{33},\quad \gamma_{23},\quad \gamma_{31},\quad \gamma_{12},$$

les six éléments qui individualisent la déformation en supposant que

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziale della teoria della elasticità; Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* (*Rend. Lincei,* t. XVIII, 1909, 2e semestre, p. 295 et 577) et *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (*Acta mathematica,* t. XXXV, 1912, p. 321 et suiv.).

le parallélipipède rectangle ait ses arêtes parallèles aux axes de coordonnées; si de plus, le déplacement de chaque point du milieu a pour composantes u, v, w, on a

$$(1)\quad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{23} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{31} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

De même, si nous considérons les tensions qui s'exerçent sur tous les éléments plans passant par un point de l'espace, elles sont déterminées par six éléments fondamentaux. Cauchy a en effet démontré qu'il suffit, pour les connaître, de connaître les tensions qui sollicitent les faces du parallélipipède envisagé tout à l'heure et que, si l'on nomme

$$t_{11},\quad t_{12},\quad t_{13}$$

les composantes sur les trois axes de la tension unitaire qui sollicite une face normale à l'axe des x,

$$t_{21},\quad t_{22},\quad t_{23}$$

celles de la tension qui sollicite une face normale à l'axe Oy,

$$t_{31},\quad t_{32},\quad t_{33}$$

celles de la tension qui sollicite une face normale à l'axe Oz, on a

$$(2)\qquad t_{12} = t_{21},\qquad t_{13} = t_{31},\qquad t_{23} = t_{32}.$$

Les conditions d'équilibre d'un petit élément intérieur de la substance sont alors

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho X, \\ \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho Y, \\ \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho Z, \end{cases}$$

ρ étant la densité et X, Y, Z les forces de masse appliquées aux éléments de volume du milieu S. Et, à la frontière σ du

milieu S, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} t_{11}\cos(nx)+t_{12}\cos(ny)+t_{13}\cos(nz)=X_\sigma, \\ t_{21}\cos(nx)+t_{22}\cos(ny)+t_{23}\cos(nz)=Y_\sigma, \\ t_{31}\cos(nx)+t_{32}\cos(ny)+t_{33}\cos(nz)=Z_\sigma, \end{cases}$$

n étant la normale à σ et X_σ, Y_σ, Z_σ les composantes des tensions extérieures qui s'exercent sur la frontière σ.

2. Les formules (1) sont des formules de cinématique. Les formules (2), (3), (4) sont de simples conséquences des lois générales de la Statique. Pour établir les équations générales de l'élasticité elles ne suffisent pas : il faut en plus une loi (d'origine expérimentale) qui relie les déformations

$$\gamma_{11},\quad \gamma_{22},\quad \gamma_{33},\quad \gamma_{23},\quad \gamma_{31},\quad \gamma_{12}$$

aux tensions

$$t_{11},\quad t_{22},\quad t_{33},\quad t_{23},\quad t_{31},\quad t_{12}.$$

Cette loi a été énoncée par Hooke dès 1660 sous la forme un peu vague suivante : *ut tensio, sic vis*. Avec précision, nous dirons : *les déformations sont des fonctions linéaires et homogènes des tensions*, et nous écrirons

$$(5)\qquad \gamma_{rs}=\Sigma a_{rs|ih}t_{ih}\qquad (r,\ s,\ i \text{ et } h=1,\ 2 \text{ ou } 3).$$

Ces équations renferment 36 coefficients, dont 21 distincts seulement, à cause du principe de la conservation de l'énergie, c'est-à-dire du fait que

$$\Sigma t_{ih}\,\delta\gamma_{ih}$$

est la différentielle totale exacte d'une fonction Φ, potentiel élastique

En résolvant les équations (5) on en tirera

$$(5')\qquad t_{ih}=\Sigma b_{ih|rs}\gamma_{rs},$$

et en remplaçant dans ces équations les γ_{rs} par les valeurs tirées de (1), puis en portant les expressions (5′) dans les équations (3), on obtiendra les équations aux dérivées partielles de l'équilibre élastique : ce sont trois équations linéaires du second ordre à trois variables x, y, z et à trois inconnues u, v, w.

3. Puisqu'il faut supposer que le potentiel P est une forme définie, les équations seront du type elliptique.

Si le corps est homogène les coefficients $a_{rs|ih}$, $b_{rs|ih}$ sont des constantes et les équations sont des équations à coefficients constants. Si, en plus, on suppose que le corps est isotrope, les 21 coefficients se réduisent à 2 et les équations de l'équilibre prennent la forme classique suivante :

$$(6)\qquad \begin{cases} K\,\Delta^2 u + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \rho X, \\ K\,\Delta^2 v + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \rho Y, \\ K\,\Delta^2 w + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \rho Z, \end{cases}$$

avec

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

L et K étant deux constantes positives.

4. Le système précédent est un système du type elliptique plus compliqué que l'équation de Laplace puisqu'on est passé d'une équation à un système de plusieurs équations. Comme pour l'équation de Laplace, les fonctions inconnues sont déterminées par leurs valeurs à la frontière. On peut aussi se proposer de déterminer u, v, w connaissant les tensions au contour : dans ce cas, ainsi qu'il est évident physiquement, u, v, w ne sont déterminés qu'à une rotation et translation arbitraire du corps près.

L'analyse de Green s'étend sans aucune difficulté à ce système : on obtient facilement un théorème de réciprocité (le théorème de Betti) et des solutions fondamentales (celles de Somigliana) ([1]).

5. Mais revenons à la loi de Hooke, c'est-à-dire aux formules (5). Elles expriment l'absence de toute action héréditaire. Elles impliquent en effet qu'à chaque instant la déformation dépend *uniquement des tensions actuelles*.

([1]) On peut ensuite appliquer la méthode de Fredholm à la détermination de la solution par ses valeurs au contour. FREDHOLM, *Arkiv för Matematik*, Bd. II, n° 28. — LAURICELLA, *Nuovo Cimento*, t. XIII, 1907.

Les équations (5) négligent donc l'hérédité dans les actions élastiques. Voulons-nous en tenir compte? Il faudra corriger ces équations et écrire

$$\gamma_{rs} = \Sigma a_{rs|ih} t_{ih} + \mathrm{F}_{rs} | [\overset{t}{\underset{-\infty}{t_{11}}}, \overset{t}{\underset{-\infty}{t_{12}}}, \ldots | t] |,$$

en ajoutant des termes qui dépendent de toutes les valeurs des tensions qui se sont exercées sur le corps. On tient bien compte ainsi de l'hérédité puisqu'alors la déformation actuelle ne dépend pas des seules actions actuelles, mais de *toute l'histoire des tensions qui se sont exercées sur l'élément qu'on envisage*.

Avant d'aller plus loin il faut préciser la forme de la fonction F : on peut supposer que F soit développable en la série analogue à la série de Taylor, et que tous les termes soient négligeables, sauf les termes linéaires; c'est faire, sur les actions héréditaires, une hypothèse analogue à la loi de Hooke.

On aura alors

$$\gamma_{rs}(t) = a_{rs|ih} t_{ih}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Sigma \varphi_{rs|ih}(t, \tau) t_{ih}(\tau) \, d\tau,$$

et l'on pourra dire qu'on est dans le cas de l'*hérédité linéaire*. Les fonctions $\varphi_{rs|ih}(t, \tau)$ se nommeront des coefficients d'hérédité.

Si l'hérédité antérieure à un certain instant o peut être négligée, on aura

$$\gamma_{rs} = a_{rs|ih} t_{ih} + \int_{0}^{t} \Sigma \varphi_{rs|ih}(t, \tau) t_{ih}(\tau) \, d\tau,$$

et en résolvant, par le procédé classique, ces équations intégrales linéaires, on trouvera

$$(7) \qquad t_{ih}(t) = \Sigma b_{ih|rs} \gamma_{rs}(t) + \int_{0}^{t} \Sigma \psi_{ih|rs}(t, \tau) \gamma_{rs}(\tau) \, d\tau,$$

formules qui expriment les tensions actuelles par l'*histoire* des déformations subies par la molécule du corps.

Remplaçons enfin dans les équations (3) les t_{ih} par leurs valeurs données par (7) et les γ_{rs} par leurs valeurs (1), nous obtenons des équations *intégro-différentielles* aux inconnues u, v, w.

Ainsi, dans le cas de l'hérédité, les équations de l'équilibre élastique ne sont plus des équations aux dérivées partielles,

mais des ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES. Si le corps est isotrope elles prennent la forme suivante [1] :

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&K\,\Delta^2 u(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial x} + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x} \right\} d\tau = \rho X,\\
&K\,\Delta^2 v(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial y} + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y} \right\} d\tau = \rho Y.\\
&K\,\Delta^2 w(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial z} + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(t) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z} \right\} d\tau = \rho Z;
\end{aligned}\right.$$

ce sont des équations du type elliptique et l'on comprend maintenant pourquoi nous avons étudié l'équation intégro-différentielle (1) du Chapitre précédent : de même que l'étude de l'équation de Laplace précède logiquement celle des équations ordinaires de l'élasticité (6), de même l'étude de l'équation (1) prépare celle du système (8).

6. Nous n'entrerons pas dans le détail de l'intégration du système (8) et nous nous contenterons d'exposer les idées générales qui s'y rapportent. La méthode à employer ne diffère pas de celle que nous avons utilisée dans le Chapitre précédent, avec même, nous le montrerons, d'importantes simplifications.

Il faut d'abord trouver le système adjoint; on l'obtient en remplaçant les équations (7) par les suivantes :

$$t_{ih}(t) = \Sigma\, b_{ih|rs}\,\gamma_{rs}(t) + \int_t^T \Sigma\, \psi_{ih|rs}(\tau, t)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau.$$

Écrivons alors les équations intégro-différentielles données sous la forme

$$\Theta_1(u, v, w) = \rho X,$$
$$\Theta_2(u, v, w) = \rho Y,$$
$$\Theta_3(u, v, w) = \rho Z,$$

et les équations au contour

$$\Psi_1(u, v, w) = X_\sigma,$$
$$\Psi_2(u, v, w) = Y_\sigma,$$
$$\Psi_3(u, v, w) = Z_\sigma.$$

---

[1] VOLTERRA, *loc. cit.* (*Rend. Lincei*, 1909, 2ᵉ semestre, p. 577, ou *Acta mathematica*, p. 333).

Posons de même pour le système adjoint

$$\Theta'_1(u', v', w') = \rho X',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\Psi'_1(u, v', w') = \rho X'_\sigma.$$

L'équation de réciprocité prendra la forme

$$\int_0^T dt\left[\int_S (\rho X u' + \rho Y v' + \rho Z w')\,dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\,d\sigma\right]$$
$$= \int_0^T dt\left[\int_S (\rho X' u + \rho Y' v + \rho Z' w)\,dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\,d\sigma\right].$$

Reste à trouver la solution fondamentale.

7. Bornons-nous, comme on le fait d'ailleurs dans le cas ordinaire, au cas d'un milieu isotrope. Les équations de l'hérédité linéaire élastique sont alors les équations (8) et le système adjoint a la forme

$$(9)\quad \begin{cases} K\Delta^2 u'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial x} + \displaystyle\int_t^T \left\{\psi(\tau, t)\,\Delta^2 u'(\tau) + [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial x}\right\} d\tau = \rho X', \\ K\Delta^2 v'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial y} + \displaystyle\int_t^T \left\{\psi(\tau, t)\,\Delta^2 v'(\tau) + [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial y}\right\} d\tau = \rho Y', \\ K\Delta^2 w'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial z} + \displaystyle\int_t^T \left\{\psi(\tau, t)\,\Delta^2 w'(\tau) + [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial z}\right\} d\tau = \rho Z'. \end{cases}$$

Pour avoir la solution fondamentale, il faut égaler à zéro les seconds membres de ces équations et en chercher un système d'intégrales u', v', w' devenant infinies du premier ordre au pôle.

C'est cette recherche qui est *beaucoup plus simple* que pour l'équation étudiée dans le dernier Chapitre. En effet des équations (9), où l'on prend les seconds membres nuls, on tire facilement

$$(10)\qquad \Delta^2\theta' = 0, \qquad \Delta^4 u' = 0, \qquad \Delta^4 v' = 0, \qquad \Delta^4 w' = 0.$$

Chacune des fonctions u', v', w' satisfait donc à une même équation aux dérivées partielles (10). En d'autres termes, *si les relations simultanées entre u', v', w' ont une forme intégro-différentielle, par contre chaque fonction inconnue prise séparément vérifie une équation aux dérivées partielles ordinaire.*

Au contraire, dans le Chapitre précédent, nous avions une seule fonction satisfaisant à une équation intégro-différentielle tout à fait irréductible en général à une équation différentielle.

En conséquence la recherche de la solution fondamentale était plus compliquée qu'à l'heure actuelle.

Dans le cas présent, il suffira de partir de l'équation

$$\Delta^4 \Phi = 0$$

et d'en prendre trois solutions

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3,$$

telles que

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)$$

soit indépendant de t. En posant ensuite

$$\begin{aligned}
u' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_1 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\
v' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_2 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\
w' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_3 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right),
\end{aligned}$$

u', v', w' seront des solutions des équations adjointes (avec seconds membres nuls) si α et β vérifient l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
&(L + 2K)\,\beta(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)]\,\beta(T, \tau)\,d\tau \\
&+ (L + K)\,\alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\,\alpha(T, \tau)\,d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Nous obtiendrons une solution fondamentale, c'est-à-dire telle que u', v', w' soient infinis comme $\frac{1}{r}$ au pôle, en prenant deux des trois fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3 égales à 0 et la troisième égale à r.

8. Nous avons donc obtenu le théorème de réciprocité et les solutions fondamentales. Il n'y a dès lors plus aucune difficulté pour appliquer au problème la méthode de Green; on trouvera facilement les formules qui expriment les déplacements u, v, w en

fonction des forces de masses X, Y, Z, des déplacements au contour et des tensions au contour [1].

Le problème général de l'élasticité consiste à obtenir les déplacements intérieurs dès que l'on connaît au contour les déplacements *ou* les tensions. Il faut pour cela, des formules obtenues, éliminer les déplacements ou les tensions. M. Lauricella [2] a réussi dans le cas le plus général à éliminer ces dernières. On peut donc dire que le problème de l'équilibre élastique, les déplacements au contour étant donnés, *est résolu dans le cas le plus général de l'hérédité linéaire*. Assurément la solution a un caractère tout théorique, mais c'est aussi le caractère de la solution générale du problème ordinaire de l'élasticité. On doit même ajouter que les formules où l'on envisage l'hérédité ne sont pas plus compliquées que celles où on la néglige.

Ainsi l'analyse est aujourd'hui assez avancée pour permettre, non seulement d'aborder, *mais encore de résoudre complètement les problèmes généraux de l'élasticité en tenant compte de l'hérédité*.

Nous verrons même que dans des cas particuliers, les plus intéressants d'ailleurs, les solutions revêtent une forme simple et parfaitement abordable pour les applications. Ce sera le sujet de Chapitres prochains [3] après quelques considérations générales sur l'hérédité qui occuperont le Chapitre VII.

9. Nous ne nous sommes occupés jusqu'à présent que des problèmes d'équilibre élastique. Les problèmes de vibration des corps élastiques conduiraient à des équations du même type que l'équation (7) du Chapitre V (n° 9), c'est-à-dire du *type hyperbolique* [4].

Nous allons maintenant, comme nous l'avions annoncé, traiter

---

(1) Pour toute cette théorie, *cf.* VOLTERRA, *loc. cit.* (*Acta mathematica*, Chap. II).

(2) LAURICELLA, *Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie* (*Lincei Rend.*, 1912, 1er semestre, p. 165).

(3) Chapitre VIII et Chapitre IX, n° 17.

(4) M. Evans a étudié aussi des équations du type parabolique. *Sull' equazione integro-differenziale di tipo parabolico* (*Lincei Rend.*, 1912, 2e semestre).

quelques cas simples d'équations de ce type (¹) : nous nous occuperons d'abord de l'équation

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} - \int_0^t \frac{\partial^2 u(z,\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau)\, d\tau,$$

qui régit le mouvement d'une corde élastique dans le cas de l'hérédité linéaire. On peut, pour l'intégrer, appliquer la méthode de séparation des variables comme dans le cas ordinaire des cordes vibrantes, c'est-à-dire rechercher les solutions de forme

$$u(z,t) = \sin m(z+\alpha) f(t),$$

où α et m sont des constantes.

Il faut et il suffit que la fonction $f(t)$ satisfasse à l'équation intégro-différentielle

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\psi(t,\tau)\, d\tau \right] = 0,$$

qui, après deux intégrations et en posant

$$a = \left(\frac{df(t)}{dt}\right)_{t=0}, \qquad b = [f(t)]_{t=0},$$

$$(t-\tau) + \int_\tau^t d\xi \int_\tau^\xi \psi(\eta_1,\tau)\, d\eta_1 = F(t,\tau),$$

s'écrit

$$(11) \qquad f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau) F(t,\tau)\, d\tau = at + b.$$

Cette équation (11) a déjà été résolue [Chapitre IV, n° 4, formules (A) à (F)]; on sait qu'en posant

$$F^{(1)}(t,\tau) = -F(t,\tau),$$

$$F^{(h)}(t,\tau) = \int_\tau^t F^{(h-k)}(t,\xi) F^{(k)}(\xi,\tau)\, d\xi$$

et

$$S(t,\tau \mid x) = x F^{(1)}(t,\tau) + x^2 F^{(2)}(t,\tau) + \ldots + x^h F^{(h)}(t,\tau) + \ldots.$$

(¹) VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità* (*Lincei Rend.*, 1912, 2ᵉ semestre).

on peut en tirer

$$f(t) = a\left[t + \int_0^t \tau\, S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right] + b\left[1 + \int_0^t S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right].$$

En écrivant enfin

$$t + \int_0^t \tau\, S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_1(t \mid x),$$

$$1 + \int_0^t S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_2(t \mid x),$$

il vient

$$f(t) = a\, S_1(t \mid m^2) + b\, S_2(t \mid m^2);$$

S_1 et S_2 sont deux transcendantes entières en x (¹).

Nous obtiendrons les solutions de l'équation (10) en combinant linéairement une infinité de solutions de la forme

$$\sin m(z + \alpha) f(t).$$

Dans le cas particulier où la corde, de longueur l, est fixée à ses extrémités, la fonction représentant son mouvement sera

$$u(z, t) = \sum_0^\infty{}_n \sin\frac{n\pi}{l} z\left[a_n S_1\left(t \,\Big|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) + b_n S_2\left(t \,\Big|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\right],$$

les a_n et les b_n étant déterminés par les conditions initiales

$$[u(z, t)]_{t=0} = \sum_0^\infty{}_n b_n \sin\frac{n\pi}{l} z,$$

$$\left[\frac{\partial u(z, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \sum_0^\infty{}_n a_n \sin\frac{n\pi}{l} z.$$

La théorie est, on le voit, *toute semblable à celle des cordes vibrantes sans hérédité, les deux fonctions* S_1 *et* S_2 *remplaçant seulement les transcendantes trigonométriques* sin *et* cos.

Les équations

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(z, t)}{\partial z^4} + \int_0^t \frac{\partial^4 u(z, \tau)}{\partial z^4} \psi(t, \tau)\, d\tau \tag{12}$$

(verge élastique) et

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \Delta^2 u(x, y, z, t) + \int_0^t \Delta^2 u(x, y, z, \tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau. \tag{13}$$

(¹) *Cf.* Chapitre IX, n° 10.

se traitent comme la précédente et introduisent comme elle les transcendantes S_1 et S_2 [1].

Un grand intérêt des considérations précédentes est qu'elles permettent, *par l'étude d'un des mouvements régis par les équations* (10), (12) *ou* (13), *de mesurer le coefficient d'hérédité* $\psi(t, \tau)$ *dans le cas important et facile à caractériser* [2] *où ce coefficient est de forme*

$$\psi(t-\tau) = \psi(\xi)$$

avec

$$t - \tau = \xi.$$

On a alors

$$F(t, \tau) = \xi + \int_0^\xi d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \psi(\xi_2)\, d\xi_2 = F(\xi),$$

$$F^{(2)}(t, \tau) = \int_0^\xi F^{(1)}(\xi_1)\, F^{(1)}(\xi - \xi_1)\, d\xi_1 = F^{(2)}(\xi),$$

. . . .

$$F^{(h)}(t, \tau) = \int_0^\xi F^{(h-k)}(\xi_1)\, F^{(k)}(\xi - \xi_1)\, d\xi_1 = F^{(h)}(\xi),$$

donc

$$S(t, \tau \mid x) = x\, F^{(1)}(\xi) + x^2\, F^{(2)}(\xi) + \ldots + x^h\, F^{(h)}(\xi) + \ldots = S(\xi \mid x)$$

et enfin

$$S_1(t \mid x) = t + \int_0^t (t-\tau)\, S(\tau \mid x)\, d\tau,$$

$$S_2(t \mid x) = 1 + \int_0^t S(\tau \mid x)\, d\tau.$$

On en conclut

$$\frac{dS_1(t \mid x)}{dt} = S_2(t \mid x),$$

$$\frac{dS_2(t \mid x)}{dt} = S(t \mid x).$$

L'étude du mouvement nous fait donc connaître $S(\xi \mid x)$; on en

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità* (*Lincei Rend.*, 1912, 2e semestre).

(2) *Cf.* Chapitre VII. C'est le cas où les conditions du cycle fermé sont vérifiées. *Cf.* Chapitre XIV, n° 6.

déduit aisément $F(\xi)$ par la formule [1]

$$x\,F(\xi) = S^{(1)}(\xi \mid x) + S^{(2)}(\xi \mid x) + \ldots + S^{(k)}(\xi \mid x) + \ldots,$$

avec

$$S^{(1)}(\xi \mid x) = - S(\xi \mid x),$$

$$S^{(2)}(\xi \mid x) = \int_0^\xi S^{(1)}(\xi_1 \mid x)\, S^{(1)}(\xi - \xi_1 \mid x)\, d\xi_1,$$

. . . . ,

$$S^{(k)}(\xi \mid x) = \int_0^\xi S^{(k-h)}(\xi_1 \mid x)\, S^{(h)}(\xi - \xi_1 \mid x)\, d\xi_1,$$

et enfin $\psi(\xi)$, par

$$\psi(\xi) = \frac{d^2\,F(\xi)}{d\xi}.$$

Le coefficient d'hérédité peut être ainsi calculé.

---

(1) *Cf.* Chapitre IV, n° 4, formule (D').

CHAPITRE VII.

LA CONDITION DU CYCLE FERMÉ.

1. Introduction. — 2. Postulat de la dissipation de l'action héréditaire. — 3-4. Invariabilité de l'hérédité. Condition du cycle fermé. — 5. Principe du cycle fermé. — 6-9. Conséquences et applications de ce principe à des cas tant linéaires que non linéaires. — 10. Il est utile d'introduire l'hérédité non linéaire pour rendre compte des particularités de certains phénomènes. — 11. Les équations fondamentales de l'électromagnétisme en tenant compte de l'hérédité. — 12. Cas statique : importance de l'équation intégro-différentielle du Chapitre V.

---

1. Nous avons, dans le Chapitre précédent, expliqué comment, dans la théorie ordinaire de l'élasticité, on admet que la déformation actuelle de la molécule est une fonction de l'état actuel des tensions. Au contraire, si l'on veut tenir compte des phénomènes d'hérédité, il faut la faire dépendre de toute l'histoire des tensions qui se sont exercées sur cette molécule [1].

Ceci s'exprime analytiquement, nous l'avons vu, par des relations

$$\gamma_{rs}(t) = \Sigma a_{rs\,|\,hk} t_{hk}(t) + \mathrm{F}_{rs}\left|\left[\overset{t}{\underset{-\infty}{t_{11}}}, \overset{t}{\underset{-\infty}{t_{12}}}, \ldots; t \right]\right|,$$

que nous avons écrites, en supposant l'hérédité linéaire

$$\gamma_{rs}(t) = \Sigma a_{rs\,|\,hk} t_{hk}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Sigma \varphi_{rs\,|\,hk}(t, \tau) t_{hk}(\tau)\, d\tau \quad (^2).$$

Les *conditions du cycle fermé*, dont nous allons maintenant nous occuper, nous permettront, quand elles seront vérifiées, de dire quelque chose *à priori* sur la forme des fonctions

$$\varphi_{rs\,|\,hk}(t, \tau).$$

---

[1] *Cf.* le Chapitre XIV.

[2] Nous avons admis implicitement dans le Chapitre précédent que les fonctions $\varphi_{rs\,|\,hk}$ ne dépendaient que de t et de τ. Si le milieu élastique n'était pas homogène, il faudrait évidemment admettre que $\varphi_{rs\,|\,hk}$ contient aussi les variables x, y, z.

ou plus généralement

$$F\left|\left[\overset{t}{\underset{-\infty}{t_{11}}}, \overset{t}{\underset{-\infty}{t_{12}}}, \ldots, t\right]\right|.$$

2. La conception fondamentale de *phénomène héréditaire* consiste à regarder l'état actuel d'un système comme dépendant de toute son histoire antérieure [1]. En nous limitant au cas le plus simple où l'état au temps $t = x$ d'un paramètre z dépend de toute l'histoire d'un autre paramètre y, c'est-à-dire de toutes les valeurs assumées par y pour $-\infty < t \leqq x$, nous aurons

$$(1) \qquad z = F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|,$$

en posant

$$y = f(t).$$

En appelant C la courbe qui a pour équation $y = f(t)$ dans l'intervalle $(-\infty, x)$, nous pourrons écrire aussi

$$(2) \qquad z = F|[C]|.$$

Nous supposerons $f(t)$ toujours inférieure en module à un nombre fixe M, nous admettrons de plus que l'*action héréditaire* diminue indéfiniment avec le temps. C'est ce que nous nommerons le *postulat de la dissipation de l'action héréditaire*, lui donnant l'énoncé suivant : *si l'on change d'une façon arbitraire la fonction $f(t)$ dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ (en la maintenant toujours inférieure en module à* M), *tandis qu'on la conserve inaltérée dans l'intervalle (x_1, x), la valeur absolue de la variation de z peut toujours être rendue inférieure à un nombre arbitrairement petit, pourvu qu'on prenne $x - x_1$ supérieur à une certaine valeur.*

3. Il est évident que si nous changeons x, extrême abscisse de la courbe C, ou $f(t)$, c'est-à-dire la courbe C elle-même, ou simultanément ces deux éléments, z changera en général.

Donnons à x et à $f(t)$ une modification simultanée consistant en une translation de la courbe C d'une longueur h parallèlement

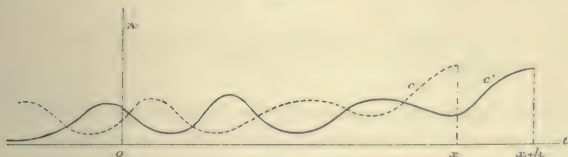
---

(1) *Cf.* Volterra, *Sui fenomeni ereditarii* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1913).

à l'axe des t. En d'autres termes, substituons à la courbe C la courbe C' dessinée en trait plein sur la figure 6. Posons

$$z' = \mathrm{F}|[C']| = \mathrm{F}|[f(t-h)_{-\infty}^{x+h}]| \quad (^1).$$

Fig. 6.



Différentes circonstances peuvent se présenter :

1° Quel que soit h et quelle que soit la fonction f, on a $z' = z$;
2° Pour certaines valeurs de h et quelle que soit f, $z' = z$;
3° Quel que soit h et pour certaines fonctions f, $z' = z$;
4° Pour certaines valeurs de h et certaines fonctions f, $z' = z$;
5° Quel que soit h et quelle que soit la fonction f, on n'a jamais $z' = z$.

Donnons des exemples de ces différents cas :

1° Soit

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)\,dt}{1 + (x-t)^4},$$

on a

$$z' = \int_{-\infty}^{x+h} \frac{f(t-h)\,dt}{1 + (x+h-t)^4} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)\,dt}{1 + (x-t)^4} = z.$$

2° Soit

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin x - x - t}{1 + (x-t)^4} f(t)\,dt.$$

En prenant $h = 2\pi n$ (n étant un nombre entier) nous aurons, quelle que soit f, $z' = z$. Cette égalité n'aura pas lieu, en général, pour d'autres valeurs de h.

---

(1) Les limites $-\infty$ et $x + h$ se rapportent à la variable t.

3° Soit

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x[f(t-2\pi) - f(t)] + f(t)}{1 + (x-t)^4}\, dt.$$

Si f est périodique et de période 2π, nous aurons $z' = z$ quel que soit h; sinon z' sera en général différent de z.

4° Soit

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x[f(t-2\pi) - f(t)] + (\sin x + x - t) f(t)}{1 + (x-t)^4}\, dt.$$

Prenons $h = 2\pi n$ (n étant entier) et f périodique de période 2π, nous aurons $z = z'$. Rien de semblable dans le cas général.

5° Si enfin

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x + t + f(t)}{1 + (x-t)^4}\, dt,$$

on a $z = z'$ dans le seul cas où $h = 0$.

4. Dans le premier cas où l'on a, quel que soit h,

$$F\left|\left[f(t)\right]_{-\infty}^{x}\right| = F\left|\left[f(t-h)\right]_{-\infty}^{x}\right|,$$

où par conséquent z *est invariant pour toutes les translations de* C *dans la direction* t (¹), il est évident que F dépend seulement des valeurs de $f(t)$, ne dépend pas du point x extrémité de la courbe. En d'autres termes, F est une *pure fonction* de la ligne. Au point de vue héréditaire, ce cas sera caractérisé par le fait que l'état en un certain instant ne dépendra pas de cet instant, mais sera entièrement déterminé par la façon dont s'est développée l'histoire antérieurement à cet instant : la loi héréditaire sera invariable dans le temps. C'est ce que nous exprimerons en disant que dans ce cas il y a *invariabilité de l'hérédité.*

Examinons maintenant le quatrième cas et supposons qu'on ait

$$F\left|\left[f(t)\right]_{-\infty}^{x}\right| = F\left|\left[f(t-T)\right]_{-\infty}^{x+T}\right|,$$

(¹) On pourra employer un langage géométrique analogue pour les autres cas.

lorsque T a une certaine valeur déterminée et que $f(t)$ est périodique avec la même période (c'était précisément le cas dans l'exemple 4° du n° 3), F *est alors invariante pour toutes les translations d'amplitude* T *parallèles à l'axe des t qui ramènent la courbe* C *en elle-même.*

Nous aurons dans ce cas

$$F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+T}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+nT}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|,$$

ce qui montre que

$$z = z(x)$$

est périodique avec la période T lorsque

$$y = f(x)$$

est périodique avec la même période.

Considérons y et z comme les coordonnées d'un point du plan. Lorsque x varie, ce point parcourra une courbe : dans le cas actuel ce sera un *cycle fermé* décrit d'un mouvement périodique de période T. Nous pourrons donc caractériser ce cas en disant que *la condition du cycle fermé avec la période* T est alors vérifiée.

L'importance de cette *condition du cycle fermé* n'échappera pas au lecteur quand nous aurons remarqué que les phénomènes d'hystérésis magnétique et élastique, qui sont le type des phénomènes héréditaires, vérifient *la condition du cycle fermé pour une période* T *arbitraire* [1]. Il est dès lors naturel de chercher, comme nous l'avons déjà dit au début de ce Chapitre, ce que ce dernier fait peut nous faire connaître sur la loi d'hérédité. La réponse est fournie par le résultat que je vais maintenant démontrer, et que j'ai nommé *principe du cycle fermé.*

5. Principe du cycle fermé. — *Si la condition du cycle fermé est vérifiée pour toutes les périodes* T, *il y a invariabilité de l'hérédité*, et réciproquement *s'il y a invariabilité de l'hérédité, la condition du cycle fermé est vérifiée pour toutes les périodes.*

---

[1] Dans la suite nous dirons alors simplement que *les conditions du cycle fermé* sont vérifiées.

Démontrons d'abord la proposition directe (¹). Supposons que

$$z = F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}} \right]\right| = F|[C]|$$

vérifie pour toute période la condition du cycle fermé et soit un nombre H tel que pour toute déformation de C entre $x - H$ et $-\infty$, F ait une variation plus petite en valeur absolue que σ. Si nous déformons C à partir de $y - H$ jusqu'à $-\infty$ de manière à la rendre périodique avec une période $T > H$ et si nous nommons C′ la courbe ainsi obtenue, $F|[C']|$ ne change pas par une translation de C′ égale à T. On en déduit que $F|[C]|$ aura, pour une translation de C égale à T et en général pour toute translation de C plus grande que H, une variation inférieure à 2σ.

Mais, par une translation positive et une translation négative, toutes deux plus grandes que H, on peut obtenir une translation arbitraire de C. Il s'ensuit que, pour toute translation de C, $F|[C]|$ subit une variation plus petite que 4σ. Or σ peut être choisi, d'après le postulat de la *dissipation de l'action héréditaire*, aussi petit qu'on veut; par conséquent $F|[C]|$ est invariant pour toute translation de C. Il y a invariabilité de l'hérédité.

La démonstration précédente suppose que, soit pour la définition de $F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}} \right]\right|$, soit pour *le postulat de dissipation*, $f(t)$ ne soit pas soumise à d'autres restrictions que celle indiquée au début de cette étude,

$$|f(t)| < M.$$

Avec de très légères modifications, la démonstration s'appliquera au cas où $f(t)$ doit avoir des dérivées jusqu'à un certain ordre, ces dérivées étant bornées en valeur absolue par un nombre N (²). Si, par exemple, $f(t)$ doit avoir une dérivée première $f'(t)$ avec

$$|f'(t)| < N, \tag{2'}$$

pour être sûr que la courbe C′ périodique obtenue en modifiant C dans l'intervalle $(-\infty, x - H)$ peut satisfaire à la condition (2′), il faut prendre T supérieur à $H + \frac{2M}{N}$, et non pas H comme pré-

(¹) *Cf.* VOLTERRA, *loc. cit.*, p. 102.

(²) C'est le cas pour la loi d'hérédité envisagée au n° 8.

cédemment. Ceci ne modifie en rien la suite des raisonnements.

La proposition réciproque se démontre immédiatement en remarquant que si la fonction $F\left|\left[C\right]\right|$ est invariante pour une translation, quelle que soit la courbe C, elle sera encore invariante lorsque C sera périodique avec une période égale à l'amplitude de la translation.

Le *principe du cycle fermé* est ainsi établi. Observons qu'il est encore valable quand f et F sont discontinues, le cycle étant alors discontinu.

6. Tirons-en maintenant quelques conséquences.

Théorème I. — *Si* $F\left|\left[f(t)\right]_{-\infty}^{x}\right|$ *satisfait à la condition du cycle fermé pour une période* T *arbitraire, si elle est continue et dérivable par rapport à* f, *on aura*

$$F'\left|\left[f(t-h),\ \xi+h\right]_{-\infty}^{x+h}\right| = F'\left|\left[f(t),\ \xi\right]_{-\infty}^{x}\right|. \tag{3}$$

Prenons en effet une fonction $\varphi(t)$ finie et continue, telle que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0 \text{ pour } t \text{ compris entre } -\infty \text{ et } -k; \\ m > \varphi(t) &> 0 \quad \text{»} \quad t \quad \text{»} \quad -k \text{ et } k; \\ \varphi(t) &= 0 \quad \text{»} \quad t \quad \text{»} \quad k \text{ et } +\infty; \end{aligned}$$

et soit

$$\int_{-k}^{+k} \varphi(t)\,dt = \sigma.$$

Puisque F satisfait aux conditions du cycle fermé, il vient

$$F\left|\left[f(t-h)+\varphi(t-\xi-h)\right]_{-\infty}^{x+h}\right| = F\left|\left[f(t)+\varphi(t-\xi)\right]_{-\infty}^{x}\right|,$$

d'où

$$\frac{F\left|\left[f(t-h)+\varphi(t-\xi-h)\right]_{-\infty}^{x+h}\right| - F\left|\left[f(t-h)\right]_{-\infty}^{x+h}\right|}{\sigma}$$

$$= \frac{F\left|\left[f(t)+\varphi(t-\xi)\right]_{-\infty}^{x}\right| - F\left|\left[f(t)\right]_{-\infty}^{x}\right|}{\sigma},$$

et, en passant à la limite lorsque k et m tendent vers zéro, on en déduira la formule (3).

Il n'est pas plus difficile de démontrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de F satisfait à la relation

$$F^{(n)}\left|\left[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-h}}), \xi_1+h, \xi_2+h, \ldots, \xi_n+h\right]\right| = F^{(n)}\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right]\right|.$$

On dira qu'une fonction Φ de la ligne $f(t)$ et de n paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vérifie les conditions du cycle fermé lorsque

$$\Phi\left|\left[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-h}}), \xi_1+h, \xi_2+h, \ldots, \xi_n+h\right]\right| = \Phi\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right]\right|,$$

on peut donc énoncer le

Corollaire I. — *Si une fonction satisfait aux conditions du cycle fermé, il en est de même de toutes ses dérivées.*

Envisageons maintenant une série [1]

$$(4)\quad \begin{aligned} F\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}})\right]\right| &= \int_{-\infty}^{x} F_1(x\mid\xi_1)\, f(\xi_1)\, d\xi_1 \\ &+ \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} F_2(x\mid\xi_1, \xi_2)\, f(\xi_1)\, f(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} F_n(x\mid\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) f(\xi_1)\ldots f(\xi_n)\, d\xi_1\ldots d\xi_n + \ldots, \end{aligned}$$

dans laquelle $F_n(x\mid\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ soit symétrique par rapport à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ et en valeur absolue inférieur à

$$\frac{n!\, M\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{R^n.(1+x-\xi_1)^{1+\varepsilon_1}(1+x-\xi_2)^{1+\varepsilon_2}\ldots(1+x-\xi_n)^{1+\varepsilon_n}},$$

$M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, R étant des nombres positifs. F sera déterminée et finie pourvu que $|f(t)| < R$ et nous aurons

$$F^{(n)}\left|\left[f(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right]\right| = F_n(x\mid\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

D'après le corollaire précédent, si F satisfait aux conditions du

---

[1] C'est l'extension de la série de Taylor envisagée au Chapitre II, n° 5.

cycle fermé on aura

$$F_n(x+h \mid \xi_1+h, \xi_2+h, \ldots, \xi_n+h) = F_n(x \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

c'est-à-dire

$$F_n(x \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = F_n(x-\xi_1, x-\xi_2, \ldots, x-\xi_n).$$

La proposition réciproque est évidente, donc :

Corollaire II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* (4) *vérifie les conditions du cycle fermé est que*

$$F_n(x \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = F_n(x-\xi_1, x-\xi_2, \ldots, x-\xi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

C'est un cas particulier de ce corollaire, celui où la série (4) se réduit à son premier terme (hérédité linéaire), que j'avais énoncé dans un précédent Mémoire sous le nom de *principe du cycle fermé* [1]. La méthode ici adoptée a permis de donner de ce principe un énoncé tout à fait général. De plus, elle a l'intérêt de constituer un premier pas dans l'étude générale des propriétés invariantes des fonctions de lignes. Sans qu'il soit besoin d'insister, il est clair que les critères mis en œuvre dans ce Chapitre sont susceptibles de notables extensions.

Jusqu'ici nous nous sommes toujours placés dans le cas simple d'une seule quantité z dépendant par une loi héréditaire d'une autre quantité y. Les résultats précédents subsistent en général : dans le cas de l'élasticité avec loi d'hérédité linéaire, par exemple, les conditions du cycle fermé imposent aux coefficients d'hérédité $\varphi_{rs \mid hk}(t, \tau)$, la forme

$$\varphi_{rs \mid hk}(t-\tau).$$

7. Supposons maintenant que

$$(5) \qquad \left| F'\left[f\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{x}}\right), \xi \right] \right| < \frac{M}{1+(x-\xi)^{1+\varepsilon}},$$

---

[1] *Sulle equazioni della elettrodinamica* (*Lincei Rend.*, 7 mars 1909). *Voir* aussi *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (*Acta mathematica*, t. XXXV) et *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. IV, § 6.

M et ε étant des quantités positives, et qu'on ait

$$(6) \qquad \delta F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{x}}\right) \right] \right| = \int_{-\infty}^{x} F' \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right), \xi \right] \right| \delta f(\xi) \, d\xi.$$

Nous pourrons démontrer le

Théorème II. — *Si la dérivée première de* $F \left| \left[f\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|$ *satisfait aux conditions du cycle fermé et si* $\left\{ F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right| \right\}_{f(t)=0}$ *est constante par rapport à* x, *alors* $F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|$ *satisfait, elle aussi, aux conditions du cycle fermé.*

En effet, posons

$$F \left| \left[f\left(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-h}}\right) \right] \right| - F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right| = \Phi \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|.$$

Il vient

$$\Phi' \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right), \xi \right] \right| = F' \left| \left[f\left(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-h}}\right), \xi + h \right] \right| - F' \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right), \xi \right] \right| = 0.$$

$\Phi \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|$ est donc indépendante de $f(t)$ (1). Mais pour $f(t) = 0$ $\left\{ \Phi \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right| \right\}_{f(t)=0}$ est nulle.

On a donc constamment

$$\Phi \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right| = 0,$$

ou

$$F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t-h}}\right) \right] \right| = F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|.$$

Théorème III. — *Si* $F \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right) \right] \right|$ *satisfait aux conditions du cycle fermé et aux conditions* (5) *et* (6), *et si* $f(t)$ *ainsi que sa dérivée première est finie et continue, nous aurons*

$$\frac{dF}{dx} = \int_{-\infty}^{x} F' \left| \left[f\left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}}\right), \xi \right] \right| f'(\xi) \, d\xi.$$

---

(1) Voir *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. I, § 9, p. 17.

En effet,

$$\begin{aligned}
0 &= F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| - F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]| \\
&= F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| - F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| + F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| - F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| - F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h} = \frac{F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t+h)}}]| - F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h},$$

et, en passant à la limite pour $h = 0$,

$$\frac{dF}{dx} = \int_{-\infty}^{x} F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}, \xi]| f'(\xi)\, d\xi.$$

8. Voici une application des considérations précédentes : soit la loi d'hérédité

$$(7) \qquad z = \int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}[f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t), x, t]\, dt,$$

la fonction $\mathfrak{F}$ étant telle que l'intégrale soit convergente et qu'on puisse faire toutes les opérations de dérivation et d'intégration par partie, dont nous aurons besoin par la suite, sous la seule condition que $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t), \ldots$ soient finies.

Pour que les conditions du cycle fermé soient satisfaites, il est évidemment suffisant qu'on ait

$$(8) \quad \mathfrak{F}[f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t), x, t] = \Phi[f(t), f'(t), \ldots, f^{n}(t), x - t].$$

Mais cette condition n'est pas nécessaire : ajoutons en effet à l'expression précédente de Φ le terme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x-t}{1+(x+t)^4} f(t)\right];$$

il n'a pas d'influence sur la valeur de z, car il s'intègre immédiatement et donne zéro aux deux extrémités de l'intervalle, mais il empêche que $\mathfrak{F}$ ait la forme (8).

Appliquons à l'intégrale (7) le corollaire I. La dérivée première de z par rapport à $f(t)$ prise au point ξ est [1]

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial f''} - \ldots\right)_{t=\xi} = \Psi[f(\xi), f'(\xi), \ldots, x, \xi];$$

[1] Nous avons calculé cette dérivée au Chapitre II, n° 6.

on doit avoir

$$\Psi[f(\xi), f'(\xi), \ldots, x+h, \xi+h) = \Psi[f(\xi), f'(\xi), \ldots, x, \xi).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial f'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial f''} - \ldots\right)_{t=\xi} = \Psi[f(\xi), f'(\xi), \ldots x - \xi).$$

Soit alors, on peut toujours la trouver, une fonction

$$\mathfrak{F}_1(f, f', \ldots, x-\xi),$$

telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial f} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial f'} + \ldots = \Psi(f, f' \ldots, x-\xi),$$

on aura

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

$\mathfrak{F}_2$ étant une fonction telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f'} + \ldots = 0.$$

Mais alors

$$\int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}_2(f, f', \ldots x, t)\, dt$$

ne dépendra que des valeurs de f, f', ... au point x.

En effet

$$\delta \int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}_2(f, f', \ldots, x, t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f}\delta f + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f'}\delta f' + \ldots\right) dt$$
$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f'}\delta f\right)_{t=x} + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial f''}\delta f'\right)_{t=x} + \ldots$$

Donc z doit pouvoir s'écrire sous la forme

$$z = \mathfrak{F}_0[f(x), f'(x), \ldots] + \int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}_1[f(t), f'(t), \ldots, x-t]\, dt;$$

$\mathfrak{F}_0$ ne dépendant pas explicitement de x. Réciproquement d'ailleurs, si z est de cette forme, la périodicité de f entraîne la périodicité de z.

En posant

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mathfrak{F}_0[f(t), f'(t), \ldots]}{1+(x-t)^2}\right\} = \mathfrak{F}_3[f(t), f'(t), \ldots, x-t],$$

il vient enfin

$$\mathfrak{F}_0[f(x), f'(x), \ldots] = \int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}_3[f(t), f'(t), \ldots, x-t]\, dt.$$

Donc

$$z = \int_{-\infty}^{x} \{\mathfrak{F}_1[f(t), f'(t), \ldots, x-t] + \mathfrak{F}_3[f(t), f'(t), \ldots, x-t]\}\, dt.$$

Quand les conditions du cycle fermé sont vérifiées, z peut toujours se mettre sous la forme

$$\int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}_4[f(t), f'(t), \ldots, x-t]\, dt,$$

et réciproquement.

Il n'est pas difficile d'étendre ce résultat à l'intégrale plus générale

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x} \mathfrak{F}[f(t_1), f'(t_1), \ldots, f(t_2), f'(t_2), \ldots, f(t_n), f'(t_n), \ldots, x, t_1, t_2, \ldots, t_n]\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

9. Dans les considérations précédentes (n° 7) nous avons toujours supposé que

$$\delta z = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{F}'[f\Big|_{-\infty}^{x}(t), \xi]\, \delta f(\xi)\, d\xi,$$

c'est-à-dire qu'il n'y avait pas de points exceptionnels.

Admettons maintenant qu'il y ait des points exceptionnels d'abscisses x_i. Il faudra alors ajouter à l'expression précédente de δz des termes de la forme

$$\mathrm{A}_{i,1}\delta f(x_i) + \mathrm{A}_{i,2}\delta f'(x_i) + \ldots + \mathrm{A}_{i,n}\delta f^{(n)}(x_i).$$

On aura

$$\delta f(x'_i - h) = \delta f(x_i),$$

en désignant par x'_i la nouvelle valeur de x_i lorsqu'on change x en $x+h$. Comme cette relation doit être vérifiée quels que soient h et δf, il faut que

$$x_i = x + \mathrm{C},$$

C étant une constante. Donc :

Un point exceptionnel ne peut différer du point x que par une constante.

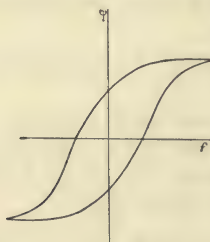
Les coefficients $A_{i,k}$ *ne doivent pas changer quand on applique à la courbe* C *une translation arbitraire parallèle à l'axe des t.*

Supposons par exemple que $A_{i,k}$ soit une fonction de $f(x_i)$, $f'(x_i)$, ..., $f^{(n)}(x_i)$ et x_i. Il ne doit pas dépendre explicitement de x_i.

10. L'étude du principe du cycle fermé dans le cas de l'hérédité non linéaire a un grand intérêt au point de vue des applications; nous allons le montrer rapidement.

Les phénomènes héréditaires auxquels on donne d'ordinaire, par exemple en électrotechnique, le nom de phénomènes d'*hystérésis*, sont en effet soumis, nous l'avons déjà vu (n° 4), aux conditions du cycle fermé. Mais ils semblent aussi soumis à la condition que, *aux maxima et minima de la courbe* C (*c'est-à-dire de* f) *correspondent des maxima et minima de* z (voir la figure ci-dessous, *fig.* 7).

Fig. 7.



D'autres phénomènes héréditaires, ceux que l'on nomme par exemple phénomènes de *traînage*, ne vérifient pas la condition précédente.

Or, cette condition ne peut pas être toujours remplie si, la loi d'hérédité étant linéaire et restant inaltérée, on y change de toutes les manières possibles l'histoire des actions auxquelles est soumis le système. On peut le montrer par des exemples [1].

[1] M. Levi-Cività a fait cette remarque et a donné des exemples.

Si l'on veut que la condition précédente relative aux maxima et minima soit satisfaite pour toute *histoire* possible, il faut utiliser des lois d'hérédité *non linéaires*. Il est facile de s'assurer qu'avec de telles lois on peut remplir la condition précédente. Il suffit par exemple de prendre

$$z(t) = \int_0^t f'(\tau)\, e^{\lambda f'(\tau)}\, d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \mathfrak{F}(\tau - u) f^2(u)\, du.$$

Nous y supposerons $\mathfrak{F}(\tau - u)$ positif et infiniment petit d'ordre $1 + \varepsilon\ (\varepsilon > 1)$ par rapport à u quand u croît indéfiniment. On a

$$z'(t) = f'(t)\, e^{\lambda f'(t)} \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{F}(t - u) f^2(u)\, du,$$

donc

$$z'(t) = 0, \qquad \text{si} \qquad f'(t) = 0.$$

En outre

$$z''(t) = f''(t)\, e^{\lambda f'(t)} \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{F}(t - u) f^2(u)\, du$$
$$+ f'(t) \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda f'(t)} \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{F}(t - u) f^2(u)\, du \right],$$

donc quand $f'(t) = 0$, z'' et f'' ont le même signe. *Les maxima et minima de f et z se correspondent bien.* On peut aussi, en choisissant λ, dépendamment de f, faire en sorte que, $f(t)$ étant périodique de période T, $z(t)$ soit périodique avec la même période. En effet $z'(t)$ est périodique et a la même période que $f(t)$. Calculons alors

$$(6) \qquad \int_0^T z'(t)\, dt = \int_0^T f'(t)\, e^{\lambda f'(t)} \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{F}(t - u) f^2(u)\, du\, dt;$$

$f'(t)$ change de signe dans l'intervalle $(0, T)$, puisque

$$\int_0^T f'(t)\, dt = 0.$$

Si nous prenions $\lambda = +\infty$ la partie où $f'(t)$ est négative serait négligeable dans l'intégrale (6), on aurait

$$\int_0^T z'(t)\, dt > 0.$$

Si nous prenions au contraire $\lambda = -\infty$ nous aurions

$$\int_0^T z'(t)\,dt < 0.$$

Entre $-\infty$ et $+\infty$ il y aura au moins une valeur de λ, soit λ_1, telle que

$$\int^T z'(t)\,dt = 0.$$

Si l'on prend $\lambda = \lambda_1$, $z(t)$ sera bien périodique et de période T.

Il est évident que toutes les théories faites ou à faire sur les équations intégro-différentielles s'étendront au cas de l'hérédité non linéaire, si l'on se borne, naturellement, à certains champs fonctionnels.

11. L'application du calcul aux phénomènes d'hérédité est intéressante non seulement pour l'Élasticité, mais encore pour la théorie du Magnétisme et de l'Électricité. Nous allons, précisant cette idée, indiquer brièvement ce que deviennent, dans l'hypothèse de l'hérédité, les équations fondamentales de l'Électrodynamique [1].

Ces équations fondamentales sont, d'après Hertz [2], les suivantes :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},\\ A\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},\\ A\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}')\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u,\\ A\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v,\\ A\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w,\end{aligned}\right.$$

(1) VOLTERRA, *Sulle equazioni della elettrodinamica* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1909, p. 203) et *Acta mathematica*, *loc. cit.*, p. 348.

(2) *Wied. Annalen*, t. XL, p. 577.

avec

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z, \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z, \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}')\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N, \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N, \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N, \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} u = \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z'), \\ v = \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z'), \\ w = \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'), \end{cases}$$

$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N, étant respectivement les composantes de l'induction et de la force magnétique; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w respectivement les composantes de l'induction, de la force et du courant électrique; X', Y', Z' celles de la force électromotrice.

Les équations (II), (II′), (III) impliquent la non-hérédité : la valeur actuelle de l'induction électrique ou magnétique, et du courant électrique ne dépendant que de la valeur actuelle de la force électrique ou magnétique. Elles ne peuvent donc représenter qu'une première approximation puisqu'elles excluent les phénomènes héréditaires. Pour obtenir l'approximation suivante et tenir compte de l'hérédité, il faut corriger le second membre des équations (II), (II′), (III) par des termes dépendant de toutes les valeurs passées de la force électrique ou magnétique. Il faut écrire

$$(\mathrm{II}_a)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) + F_1 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) + F_2 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) + F_3 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}'_a)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) + \Phi_1 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{M}(t) = \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) + \Phi_2 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{N}(t) = \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) + \Phi_3 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right|, \end{cases}$$

où F_1, F_2, F_3 sont des quantités dépendant de toutes les valeurs de

$X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ pour $-\infty < \tau < t$ et de même Φ_1, Φ_2, Φ_3. Admettons enfin que les effets de la superposition des forces électriques ou magnétiques s'additionnent, les F et les Φ seront alors linéaires, le système (II_a) s'écrira

$$(\mathrm{II}_b)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11}X(t) + \varepsilon_{12}Y(t) + \varepsilon_{13}Z(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [X(\tau)\varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t,\tau)]\,d\tau, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21}X(t) + \varepsilon_{22}Y(t) + \varepsilon_{23}Z(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [X(\tau)\varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{23}(t,\tau)]\,d\tau, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31}X(t) + \varepsilon_{32}Y(t) + \varepsilon_{33}Z(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [X(\tau)\varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{33}(t,\tau)]\,d\tau, \end{cases}$$

et de même

$$(\mathrm{II}'_b)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11}L(t) + \mu_{12}M(t) + \mu_{13}N(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [L(\tau)\psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{13}(t,\tau)]\,d\tau, \\ \mathfrak{M}(t) = \mu_{21}L(t) + \mu_{22}M(t) + \mu_{23}N(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [L(\tau)\psi_{21}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{22}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{23}(t,\tau)]\,d\tau, \\ \mathfrak{N}(t) = \mu_{31}L(t) + \mu_{32}M(t) + \mu_{33}N(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} [L(\tau)\psi_{31}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{32}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{33}(t,\tau)]\,d\tau, \end{cases}$$

équations où, si le corps n'est pas homogène, les ε_{is}, μ_{is}, φ_{is}, ψ_{is} sont aussi des fonctions de x, y, z. En portant ces valeurs de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ dans les équations (I) et (I'), on aura un système d'équations intégro-différentielles pour déterminer le champ électromagnétique. La condition du cycle fermé se traduira, d'après les considérations précédentes, par le fait suivant :

$$\varphi_{11},\quad \varphi_{12},\quad \ldots,\quad \psi_{11},\quad \psi_{12},\quad \ldots,$$

seront fonctions seulement de la différence $t - \tau$.

D'après une remarque précédente (Chap. VII, n° 10), l'hypothèse simple que nous venons de faire ne suffira pas à exprimer complètement les phénomènes d'hérédité des corps ferro-magnétiques. Il faudra dans ce cas (si l'on veut qu'à des maxima et minima de la force magnétique correspondent des maxima et minima de l'induction) admettre pour Φ_1, Φ_2, Φ_3 des formes plus compliquées, non linéaires. On sera conduit pour déterminer le champ électromagnétique à des équations intégro-différentielles plus complexes que précédemment.

12. Pour terminer, nous allons montrer le rôle que joue, dans l'étude de ces phénomènes d'hérédité, l'équation intégro-différentielle étudiée dans le Chapitre V.

Supposons l'hérédité linéaire et plaçons-nous dans le *cas statique*, c'est-à-dire admettons que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ varient avec le temps assez lentement pour qu'on puisse négliger les dérivées

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Nous aurons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$L = \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad M = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad N = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Supposons que les ε et les φ soient indépendants de x, y, z. Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux de la quadrique

$$\varepsilon_{11}x^2 + \varepsilon_{22}y^2 + \varepsilon_{33}z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})xy = 1,$$

que nous supposerons coïncider avec ceux de la quadrique

$$\varphi_{11}x^2 + \varphi_{22}y^2 + \varphi_{33}z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32})yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13})zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21})xy = 1,$$

quels que soient t et τ. Les formules (II_b) deviendront

$$\mathcal{X} = \varepsilon_{11}\frac{\partial V(t)}{\partial x} + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial V(\tau)}{\partial x}\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{Y} = \varepsilon_{22}\frac{\partial V(t)}{\partial y} + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi_{22}(t,\tau)\,d\tau,$$

$$\mathcal{Z} = \varepsilon_{33}\frac{\partial V(t)}{\partial z} + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\varphi_{33}(t,\tau)\,d\tau;$$

d'où, en tenant compte de

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z} = 0,$$

on tire pour déterminer V *l'équation indéfinie*

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial z^2}$$
$$+ \int_{-\infty}^{t}\left[\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}\varphi_{11}(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi_{22}(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\varphi_{33}(t,\tau)\right]d\tau = 0.$$

Cette équation, si l'on fait un changement linéaire sur les variables et si l'on admet en outre que les forces électriques antérieures à l'instant o soient négligeables, se réduit à l'équation

$$\Delta^2 V(t) + \int_{0}^{t}\left[\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right]d\tau = 0$$

étudiée au Chapitre V.

Ceci met bien en évidence l'intérêt de cette dernière équation.



CHAPITRE VIII.

LE PROBLÈME DE LA SPHÈRE ÉLASTIQUE ISOTROPE AVEC HÉRÉDITÉ.

1-2. Les équations de l'élasticité héréditaire dans le cas d'un corps isotrope. — 3. Théorème de M. Almansi sur les fonctions biharmoniques. Grâce à ce théorème le problème de la sphère élastique (déplacements au contour donnés) est réduit à l'intégration d'une équation intégro-différentielle. — 4-6. La nouvelle transcendante entière $V(z \mid x, y)$. Son théorème d'addition. — 7. Intégration de l'équation intégro-différentielle précédente. — 8. Résolution du problème de la sphère élastique (déplacements au contour donnés).

---

1. Revenons aux problèmes de l'élasticité. Nous avons vu que, dans le cas de l'hérédité linéaire, les équations d'équilibre d'un corps élastique homogène et isotrope sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &K\,\Delta^2 u(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial x} \\ &\qquad + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x} \right\} d\tau = 0, \\ &K\,\Delta^2 v(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial y} \\ &\qquad + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y} \right\} d\tau = 0, \\ &K\,\Delta^2 w(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial z} \\ &\qquad + \int_0^t \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau) + [\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)]\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z} \right\} d\tau = 0, \end{aligned}\right.$$

quand les forces de masse sont nulles. Si les forces de masse n'étaient pas nulles on pourrait toujours les éliminer par un théorème analogue à celui de Poisson.

On peut écrire ces équations d'une manière plus simple grâce à une notation que nous allons indiquer.

Posons

$$K f(t) + \int_0^t \psi(t,\tau) f(\tau)\,d\tau = A_1 f,$$

A_1 représente une certaine transformation appliquée à la fonction f. Nous nommerons A_1^{-1} la transformation inverse de A_1, c'est-à-dire telle que si

$$A_1 f = \varphi,$$

on ait

$$f = A_1^{-1}\varphi.$$

L'opération A_1^{-1} est une opération de même type que A_1, et nous pouvons, par des procédés exposés précédemment [1], l'obtenir très facilement.

Posons de même

$$(L + 2K)f(t) + \int_0^t [\varphi(t,\tau) + 2\psi(t,\tau)]\, f(\tau)\, d\tau = A_2 f,$$

et appelons A_2^{-1} l'opération inverse de A_2.

Avec ces notations les équations (1) peuvent s'écrire

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} &A_1 \Delta^2 u + (A_2 - A_1)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\\ &A_1 \Delta^2 v + (A_2 - A_1)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,\\ &A_1 \Delta^2 w + (A_2 - A_1)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 u = (1 - A_1^{-1}A_2)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(1 - A_1^{-1}A_2)\theta] \quad (^2),\\ &\Delta^2 v = (1 - A_1^{-1}A_2)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[(1 - A_1^{-1}A_2)\theta],\\ &\Delta^2 w = (1 - A_1^{-1}A_2)\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[(1 - A_1^{-1}A_2)\theta], \end{aligned} \right.$$

ou enfin en posant

$$(1 - A_1^{-1}A_2)\theta = \mathfrak{J},$$

$$(2') \quad \Delta^2 u = \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x}, \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial y}, \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial z}.$$

---

(1) Par la résolution d'une équation intégrale de Volterra, *cf.* Chapitre IV.

(2) Dans le symbole $A_1^{-1}A_2$ il faut entendre que l'opération A_1^{-1} est appliquée après l'opération A_2.

2. Nous avons, dans le Chapitre VI (p. 94), annoncé que

(3) $$\Delta^2\theta = 0, \qquad \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0.$$

C'est immédiat sur les équations (2) ou (2'); on en tire, en effet,

$$\Delta^2\theta = (1 - A_1^{-1} A_2)\Delta^2\theta,$$

ou

$$A_1^{-1} A_2 \Delta^2\theta = 0,$$

et par conséquent

$$\Delta^2\theta = 0;$$

cette dernière égalité entraînant

$$\Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0,$$

et aussi

(4) $$\Delta^2\mathfrak{S} = 0.$$

3. Je rappelle maintenant un théorème de M. Almansi sur les fonctions biharmoniques [1] d'après lequel : *les fonctions u, v, w satisfaisant aux équations* (2'), *où $\mathfrak{S}$ est une fonction harmonique, sont de la forme*

(5) $$\begin{cases} u = U + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ v = V + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ w = W + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

avec

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

R *étant une constante arbitraire et* U, V, W, f *des fonctions harmoniques*, f *étant seulement assujettie à vérifier l'équation*

(6) $$\frac{1}{2}f + r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4}\mathfrak{S}.$$

M. Almansi a appliqué ce théorème à l'étude du problème ordinaire de la sphère élastique. Nous l'utiliserons ici à traiter le même problème en tenant compte de l'hérédité.

Énonçons tout d'abord ce problème. Soit une sphère élastique

---

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica* (*Memorie della R. Acc. di Torino*, anno 1896-1897). M. Almansi appelle *fonction biharmonique* une fonction qui vérifie l'équation $\Delta^2\Delta^2 = 0$.

homogène isotrope de rayon R, de centre l'origine. Supposons connues *les déplacements au contour;* admettons que les forces de masse soient négligeables, il s'agit de calculer les déplacements u, v, w à l'intérieur de cette sphère [1].

Dans les équations (5) les fonctions harmoniques U, V, W sont connues au contour [2] et par conséquent à l'intérieur de la sphère.

Il reste à déterminer f. Or, des équations (5) on tire

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r};$$

d'où, en posant

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

$$\mathfrak{F} = (1 - A_1^{-1} A_2)\theta = (1 - A_1^{-1} A_2)\Theta + (1 - A_1^{-1} A_2)\left(2r\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

En y remplaçant $\mathfrak{F}$ par cette valeur l'équation (6) devient alors

$$f + (1 + A_1^{-1} A_2)\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}(1 - A_1^{-1} A_2)\Theta,$$

et en résolvant en $r\frac{\partial f}{\partial r}$.

$$r\frac{\partial f}{\partial r} = -(1 + A_1^{-1} A_2)^{-1} f + \frac{1}{2}(1 + A_1^{-1} A_2)^{-1}(1 - A_1^{-1} A_2)\Theta,$$

c'est-à-dire

$$r\frac{\partial f}{\partial r} + (A_1 + A_2)^{-1} A_1 f = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)^{-1}(A_1 - A_2)\Theta.$$

La transformation $(A_1 + A_2)^{-1} A_1$ se calcule aisément, elle a la forme

$$cf + \int_0^t S_0(\tau, t) f(\tau, r)\, d\tau,$$

c étant la constante

$$\frac{K}{L + 3K},$$

et S_0 une fonction facile à obtenir.

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell' elasticità nel caso di una sfera isotropa* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1910, p. 107).

[2] D'après les conditions aux limites, les valeurs au contour de U, V, W étant précisément celles de u, v, w.

Finalement il faut, pour trouver f, intégrer l'équation intégro-différentielle

$$(A) \qquad r\frac{\partial f(t,r)}{\partial r}+cf(t,r)+\int_0^t S_0(\tau,t)f(\tau,r)\,d\tau=\Phi(t,r),$$

où $\Phi(t, r)$ est la fonction connue

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2)^{-1}(A_1-A_2)\Theta.$$

Dans cette équation f et Φ sont fonctions, non seulement de t et de r, mais encore des deux angles polaires qui servent à fixer la position d'un point sur la sphère : ces deux angles n'entrent dans l'équation (A) que comme paramètres. Aussi nous n'avons pas à nous en préoccuper.

4. Nous avons ainsi ramené l'intégration d'un système de trois équations intégro-différentielles aux dérivées partielles à l'intégration d'une équation intégro-différentielle ordinaire du premier ordre (A).

L'équation (A) peut s'intégrer par plusieurs méthodes. Celle que nous allons développer introduira une nouvelle transcendante jouissant de propriétés bien curieuses et ouvrira la voie à un nouvel ensemble de recherches.

5. Revenons sur la résolution des équations intégrales par la méthode des déterminants infinis.

Nous avons déjà remarqué (Chap. IV, n° 4) qu'en posant

$$-\mathfrak{F}(x,y)=\mathfrak{F}^{(1)}(x,y), \qquad \text{avec} \qquad |\mathfrak{F}(x,y)|<M,$$

et

$$\mathfrak{F}^{(k)}(x,y)=\int_x^y \mathfrak{F}^{h}(x,\xi)\,\mathfrak{F}^{(k-h)}(\xi,y)\,d\xi,$$

on a

$$|\mathfrak{F}^{(k)}(x,y)|<\frac{M^k(y-x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

et que la série

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k\,\mathfrak{F}^{(k)}(x,y)$$

est donc toujours convergente.

En remplaçant $\mathfrak{F}(x,y)$ par $z\,\mathfrak{F}(x,y)$ nous obtenons la série

$$(7)\qquad \sum_{1}^{\infty} z^k\, \mathfrak{F}^{(k)}(x,y),$$

convergente quel que soit le module de z.

Posons maintenant

$$V(z \mid x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n!}\mathfrak{F}^{(n)}(x,y),$$

la fonction V est *a priori* une fonction holomorphe de z dans tout le plan de la variable complexe z. C'est une transcendante entière. Elle jouit des propriétés suivantes :

Théorème I. — *Quel que soit le nombre positif* α, *on a*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{V(z \mid x, y)}{e^{\alpha |z|}} = 0.$$

En effet

$$|V(z \mid x, y)| \leqq \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{1}^{m}{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} M^{m+n+1}\frac{(y-x)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

Mais, ε étant choisi arbitrairement petit, on peut déterminer m de façon que

$$\frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n}}{(m+n)!} < \varepsilon \alpha^{m+n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

il vient alors

$$|V(z \mid x, y)| < \sum_{1}^{m}{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \varepsilon \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1}.$$

D'autre part

$$e^{\alpha |z|} = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{|\alpha z|^n}{n!} > \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1},$$

donc

$$\frac{|V(z|x,y)|}{e^{\alpha|z|}} < \varepsilon + \frac{\sum_1^m{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_0^\infty \frac{|z|^{m+n+1}\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!}}$$

$$< \varepsilon + \frac{\sum_1^m{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

En prenant $|z|$ assez grand, on peut rendre le second terme

$$\frac{\sum_1^m{}_n \frac{|z|^n}{n!}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}} = \sum_1^m \frac{(m+1)!}{|z|^{m-n+1}}\frac{M^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!\,n!\,\alpha^{m+1}},$$

arbitrairement petit.

La limite de $\frac{V(z|x,y)}{e^{\alpha|z|}}$ lorsque $|z|$ croît indéfiniment est donc bien nulle.

Corollaire. — *Quel que soit le nombre c positif, on a*

$$\lim_{\zeta=0}\left[V\left(\log\frac{\zeta}{\zeta_1}\middle|x,y\right)\left(\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^c\right] = 0. \tag{8}$$

Mais la propriété la plus importante de la transcendante V est la suivante :

Théorème II. — *La fonction* $V(z|x,y)$ *admet le théorème d'addition suivant :*

$$\begin{aligned} V(z+u|x,y) - V(z|x,y) - V(u|x,y) &= \int_x^y V(z|x,\xi)V(u|\xi,y)\,d\xi \\ &= \int_x^y V(u|x,\xi)V(z|\xi,y)\,d\xi. \end{aligned} \tag{B}$$

En effet, formons le produit

$$V(z|x,\xi)V(u|\xi,y),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n!}\mathfrak{F}^{(n)}(x,\xi)\sum_1^\infty \frac{u^n}{n!}\mathfrak{F}^{(n)}(\xi,y),$$

ou, d'après la règle classique,

$$\sum_1^\infty{}_n \sum_1^{n-1}{}_i \frac{z^i u^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\mathfrak{F}^{(i)}(x,\xi)\,\mathfrak{F}^{(n-i)}(\xi,y),$$

et intégrons-le par rapport à ξ entre les limites x et y, il vient

$$\begin{aligned}\int_x^y &\mathrm{V}(z\,|\,x,\xi)\,\mathrm{V}(u\,|\,\xi,\eta)\,d\xi\\ &=\sum_1^\infty{}_n\sum_1^{n-1}{}_i\frac{z^i u^{n-1}}{i!\,(n-i)!}\int_x^y \mathfrak{F}^{(i)}(x,\xi)\,\mathfrak{F}^{(n-i)}(\xi,\eta)\,d\xi\\ &=\sum_1^\infty{}_n\mathfrak{F}^{(n)}(x,y)\sum_1^{n-1}\frac{z^i u^{n-i}}{i!\,(n-i)!}.\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_1^{n-1}{}_i\frac{z^i u^{n-i}}{i!\,(n-i)!}=\frac{(z+u)^n}{n!}-\frac{z^n}{n!}-\frac{u^n}{n!},$$

par suite on a

$$\int_x^y \mathrm{V}(z\,|\,x,\xi)\,\mathrm{V}(u\,|\,\xi,y)\,d\xi=\mathrm{V}(z+u\,|\,x,y)-\mathrm{V}(z\,|\,x,y)-\mathrm{V}(u\,|\,x,y).$$

C'est l'égalité demandée.

Le théorème précédent est un *théorème d'addition*, puisqu'il permet de passer des fonctions V correspondantes aux valeurs z et u à la fonction correspondante à $z+u$. Mais il n'a pas la forme des théorèmes d'addition envisagés ordinairement : c'est ce que j'appelle *un théorème d'addition intégral*.

On pourrait, réciproquement, chercher quelles sont les fonctions qui admettent le théorème d'addition intégral précédent. Ce serait se placer à un point de vue analogue à celui de Weierstrass qui définissait ainsi les fonctions elliptiques par leurs théorèmes d'additions. On constaterait que le théorème d'addition (B) *caractérise* les fonctions du type $\mathrm{V}(z\,|\,x,y)$.

Nous avons ici un premier exemple [1] *d'une transcendante entière donnée par une série très rapidement convergente et possédant un théorème d'addition intégral.* Il est évident que, grâce à sa convergence rapide, la série (7) sera utilisable dans les calculs pratiques.

6. Du théorème d'addition (B), par des dérivations et en posant

$$\frac{\partial V(z \mid x, y)}{\partial z} = V'(z \mid x, y), \qquad \frac{\partial^2 V(z \mid x, y)}{\partial z^2} = V''(z \mid x, y), \qquad \ldots,$$

on déduit les égalités

$$(9) \qquad V'(z+u \mid x, y) - V'(z \mid x, y) = \int_x^y V'(z \mid x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi$$
$$= \int V(u \mid x, \xi)\, V'(z \mid \xi, y)\, d\xi,$$

$$V''(z+u \mid x, y) = \int_x^y V'(z \mid x, \xi)\, V'(u \mid \xi, y)\, d\xi,$$

. . . . ,

$$V^{(i+h)}(z+u \mid x, y) = \int_x^y V^{(i)}(z \mid x, \xi)\, V^{(h)}(u \mid \xi, y)\, d\xi$$
$$(i, h = 1, 2, 3 \ldots).$$

L'égalité (9), pour $z = 0$, donne

$$V'(u \mid x, y) - V'(0 \mid x, y) = \int_x^y V'(0 \mid x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi$$
$$= \int_x^y V(u \mid x, \xi)\, V'(0 \mid \xi, y)\, d\xi,$$

donc, puisque

$$V'(0 \mid x, y) = \mathfrak{F}^{(1)}(x, y),$$

$$(10) \qquad V'(u \mid x, y) - \mathfrak{F}(x, y) = \int_x^y \mathfrak{F}^{(1)}(x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi$$
$$= \int^y V(u \mid x, \xi)\, \mathfrak{F}^{(1)}(\xi, y)\, d\xi.$$

7. Nous pouvons maintenant intégrer l'équation intégro-différentielle aux dérivées ordinaires (A). Nous l'écrirons, changeant

---

[1] Comparer Chapitre X, nos 5 et 6.

légèrement les notations,

$$(a)\qquad y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)+\int_0^x \mathfrak{F}^{(1)}(\xi,x)f(\xi,y)\,d\xi=\Phi(x,y).$$

Nous voulons en trouver une solution finie et continue.

Multiplions les deux membres de cette équation par $V(z \mid x, x_1)$ et intégrons entre o et x_1. Il vient

$$(11)\qquad \int_0^{x_1}\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)\right]V(z\mid x,x_1)\,dx + \int_0^{x_1}V(z\mid x,x_1)\,dx\int_0^x \mathfrak{F}^{(1)}(\xi,x)f(\xi,y)\,d\xi = \int_0^{x_1}\Phi(x,y)\,V(z\mid x,x_1)\,dx.$$

Mais le second terme s'écrit

$$\int_0^{x_1} f(\xi,y)\,d\xi\int_\xi^{x_1}V(z\mid x,x_1)\,\mathfrak{F}^{(1)}(\xi,x)\,dx,$$

ou en tenant compte de l'équation (10)

$$\int_0^{x_1} f(\xi,y)\,d\xi[V'(z\mid \xi,x_1)-\mathfrak{F}^{(1)}(\xi,x_1)]\,d\xi.$$

L'équation (11) prend donc la forme

$$\int_0^{x_1}\left\{\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)\right]V(z\mid x,x_1)+f(x,y)\,V'(z\mid x,x_1)\right\}dx - \int_0^{x_1} f(x,y)\,\mathfrak{F}^{(1)}(x,x_1)\,dx = \int_0^{x_1}\Phi(x,y)\,V(z\mid x,x_1)\,dx,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (a),

$$y\frac{\partial f(x_1,y)}{\partial y}+cf(x_1,y) + \int_0^{x_1}\left\{\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)\right]V(z\mid x,x_1) + f(x,y)\,V'(z\mid x,x_1)\right\}dx = \Phi(x_1,y)+\int_0^{x_1}\Phi(x,y)\,V(z\mid x,x_1)\,dx.$$

Posons $z = \log \frac{y}{y_1}$, nous aurons

$$V'(z \mid x, x_1) = y \frac{\partial V(z \mid x, x_1)}{\partial y},$$

et, en multipliant les deux membres de l'équation précédente par y^{c-1}, elle deviendra

$$\frac{\partial}{\partial y}[y^c f(x, y)] + \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial y}[y^c f(x, y) V(z \mid x, x_1)] \, dx$$
$$= \left[\Phi(x_1, y) + \int_0^{x_1} \Phi(x, y) V(z \mid x, x_1) \, dx\right] y^{c-1}.$$

En intégrant par rapport à y entre les limites o et y_1 on obtient enfin, à cause de la formule (8) (n° 5),

$$y_1^c f(x_1, y_1) + \int_0^{x_1} y_1^c f(x, y_1) [V(z \mid x, x_1)]_{z=0} \, dx$$
$$= \int_0^{y_1} \left[\Phi(x_1, y) + \int_0^{x_1} \Phi(x, y) V(z \mid x, x_1) \, dx\right] y^{c-1} \, dy,$$

ou, puisque

$$V(z \mid x, x_1)_{z=0} = 0,$$

$$\text{(C)} \quad f(x, y) = \frac{1}{y^c} \int_0^y \eta^{c-1} \left[\Phi(x, \eta) + \int_0^x \Phi(\xi, \eta) V\left(\log \frac{\eta}{y} \middle| \xi, x\right) d\xi\right] d\eta,$$

formule qui détermine la fonction inconnue f (¹).

La fonction $f(x, y)$ ainsi trouvée n'est pas la solution générale de l'équation (a). Nous avons, en effet, recherché seulement les solutions finies et continues de l'équation (a), nous constatons qu'il y en a une et une seule donnée par la formule (C). On peut obtenir la solution générale de l'équation (a). Elle est la somme de deux termes, le premier étant le second membre de (C) et le second

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{y_0}{y}\right)^c \left[\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) V\left(\log \frac{y_0}{y} \middle| \xi, x\right) d\xi\right].$$

Dans cette dernière formule y_0 est une constante arbitraire et $\psi(x)$ une fonction arbitraire ; on a d'ailleurs

$$\varphi(x, y_0) = \psi(x).$$

(¹) On constate aisément que la fonction déterminée par la formule (C) n'a pas de singularité pour $y = 0$.

Ainsi l'intégrale générale d'une équation intégro-différentielle, même aux dérivées ordinaires, dépend de fonctions arbitraires.

8. Les considérations précédentes résolvent le problème de la sphère élastique (déplacements au contour donnés). Nous avons vu, en effet, que la solution pouvait s'écrire

$$u = U + (r^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$v = V + (r^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$w = W + (r^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

U, V, W sont des fonctions harmoniques déterminées par leurs valeurs à la surface de la sphère et f est donné par la formule (C). Le problème est donc résolu et la solution est, grâce à la rapidité de convergence du développement de $V(z|x, y)$, *pratiquement utilisable*.

On peut encore simplifier la solution en remarquant que si l'on pose

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f_3,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi_3,$$

on a

$$r\frac{\partial f_i(t, r)}{\partial r} + (c+1)f_i(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t)f_i(\tau, r)\,d\tau = \Phi_i(t, r)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

La formule (C) permet donc de calculer directement $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sans passer par l'intermédiaire de f.

CHAPITRE IX.

LA COMPOSITION ET LA PERMUTABILITÉ DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1-5. Définitions et règles de calcul. — 6-7. Recherche des fonctions permutables avec l'unité. Elles forment le groupe du cycle fermé. — 8. Extensions diverses de la composition. — 9-12. Les séries de fonctions permutables. — 13. Application de la théorie à la résolution générale des équations intégrales. — 14-16. Résolution de quelques équations particulières. Unicité de la solution. — 17. Application au problème de la sphère isotrope, les tensions au contour étant données.

1. Nous avons, dans le Chapitre précédent, résolu très simplement le problème de la sphère élastique. Nous l'avons en effet ramené : 1° à la résolution du problème de Dirichlet pour la sphère, qui ne présente aucune difficulté, 2° au calcul de la nouvelle transcendante entière $V(z \mid x, y)$ par une série rapidement convergente.

Mais nous nous sommes placés dans le cas où les déplacements au contour sont donnés. C'est le cas le plus simple, mais aussi le moins intéressant. Dans les applications, ce sont *les tensions au contour* qui sont connues la plupart du temps.

Nous avons laissé de côté ce problème : équilibre de la sphère élastique, les tensions au contour étant données, parce qu'il présente des difficultés bien plus grandes que celui que nous avons traité. Les notions exposées jusqu'à présent sont insuffisantes pour en obtenir une solution *simple*. Il faut, avant de le traiter, développer une nouvelle théorie d'analyse : celle *des fonctions permutables et de la composition*.

Et la portée de cette théorie dépasse ce problème particulier, elle nous ouvre un domaine nouveau et fait avancer beaucoup la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles.

Elle nous permet, en effet, de résoudre immédiatement une classe très étendue de ces équations, comprenant en particulier toutes celles que nous avions considérées jusqu'à présent.

2. Nous étudierons d'abord la composition et la permutabilité de première espèce [1].

Soient $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ *deux fonctions finies et continues. L'opération*

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi$$

sera dite composition de première espèce des deux fonctions. Les deux fonctions seront dites composantes et le résultat de l'opération sera la fonction résultante.

Nous la désignerons par la notation

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2(x, y)$$

ou simplement

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2;$$

on pourra même, quand toute confusion sera impossible, supprimer les étoiles et l'écrire simplement

$$F_1 F_2(x, y) \qquad \text{ou} \qquad F_1 F_2.$$

Nous nommerons l'opération précédente *composition de première espèce* pour la distinguer d'une composition de deuxième espèce qui sera définie au Chapitre XII (n° 1).

L'opération de composition [2] *est associative.* En effet, $F_3(x, y)$ étant une nouvelle fonction finie et continue, on a

$$\int_x^y F_1(x, \xi) d\xi \int_\xi^y F_2(\xi, \eta) F_3(\eta, y) d\eta$$
$$= \int_x^y F_3(\eta, y) d\eta \int_x^\eta F_1(x, \xi) F_2(\xi, \eta) d\xi,$$

qu'on peut écrire

$$\big(\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_3)\big) = \big((\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}_3\big).$$

Cette dernière égalité [3] exprime bien l'associativité.

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Rend. dei Lincei*, 1er semestre, 1910, p. 169).

(2) Composition de première espèce; c'est la seule dont il sera question jusqu'au Chapitre XII.

(3) Dans cette égalité, les parenthèses ont le même sens que dans la théorie ordinaire de la multiplication : pour former $\big(\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_3)\big)$, il faut d'abord former la fonction $\overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_3$, puis la composer avec F_1.

3. Au contraire, la composition n'est pas en général commutative; on n'a pas, en général,

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_1.$$

Définition de la permutabilité. — *Deux fonctions* $F_1(x, y)$ *et* $F_2(x, y)$ *seront dites permutables (de première espèce) si l'on a*

$$\int_x^y F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi)\, F_1(\xi, y)\, d\xi,$$

c'est-à-dire

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_1.$$

On en conclut que :

I. *Les opérations de composition entre des fonctions permutables ont les propriétés d'associativité et de commutativité.*

II. *Un système de fonctions permutables étant donné, toutes les fonctions qu'on peut en déduire par des opérations de composition appliquées à ces fonctions et à leur résultantes sont permutables entre elles et avec les fonctions données.*

Pour démontrer ce dernier théorème, il suffit de remarquer que F_1, F_2, F_3 étant des fonctions permutables entre elles, on a

$$\begin{aligned}((\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}_3) = (\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_2\overset{*}{F}_3)) = (\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_3\overset{*}{F}_2)) = ((\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_3)\overset{*}{F}_2)\\ = ((\overset{*}{F}_3\overset{*}{F}_1)\overset{*}{F}_2) = (\overset{*}{F}_3(\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2)).\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2$ est permutable avec F_3.

4. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des fonctions de x, y permutables entre elles; nous noterons

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 \ldots \overset{*}{F}_n(x, y) \qquad \text{ou} \qquad \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 \ldots \overset{*}{F}_n,$$

la fonction obtenue en composant F_1 avec F_2, la résultante ainsi obtenue avec F_3, la nouvelle résultante avec F_4 et ainsi de suite.

En vertu des théorèmes que nous venons d'énoncer, l'ordre

dans lequel on fait la composition des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (composantes) n'a aucune influence sur la fonction résultante.

Si l'on a $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$ on notera la fonction résultante

$$\overset{*}{F}{}^n(x, y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{F}{}^n.$$

De même

$$\overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_p^{i_p}$$

représentera la fonction résultante de i_1 fonctions égales à F_1, i_2 fonctions égales à F_2, etc., i_n fonctions égales à F_n.

Les puissances symboliques ainsi définies obéissent aux mêmes règles de calcul que les puissances ordinaires.

5. Des définitions, on déduit enfin que :

III. *Les fonctions qu'on obtient par l'addition ou la soustraction de fonctions permutables sont permutables entre elles et avec les fonctions primitives.*

IV. *Pour composer des polynomes dont les termes sont des fonctions permutables, il suffit d'appliquer les règles de la multiplication des polynomes ordinaires.*

6. Avant d'aller plus loin, nous étudierons un groupe remarquable de fonctions permutables : *les fonctions permutables avec l'unité.*

Nous montrerons les théorèmes suivants :

a. Toutes les fonctions permutables de première espèce avec l'unité sont de forme $F(y - x)$.

En effet, elles vérifient l'égalité

$$\int_x^y F(x, \xi)\, d\xi = \int_x^y F(\xi, y)\, d\xi = \Phi(x, y),$$

d'où l'on tire

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F(x, y)$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

On a donc

$$\Phi(x, y) = \Phi(y - x)$$

et, par suite,

$$F(x, y) = F(y - x); \tag{2}$$

b. Toutes les fonctions de forme $F(y - x)$ *sont permutables entre elles.*

En effet, on a

$$\int_x^y F_1(\xi - x) F_2(y - \xi)\, d\xi = \int_0^{y-x} F_1(u) F_2(y - x - u)\, du,$$

et en posant

$$y - x - u = v,$$

$$\int_0^{y-x} F_1(u) F_2(y - x - u)\, du = \int_0^{y-x} F_1(y - x - v) F_2(v)\, dv,$$

c'est pourquoi

$$\int_x^y F_1(\xi - x) F_2(y - \xi)\, d\xi = \int_x^y F_1(y - \xi) F_2(\xi - x)\, dx.$$

Ce dernier résultat contient en particulier *la réciproque de a*, à savoir que *toutes les fonctions de la forme* (2) *sont permutables de première espèce avec l'unité.*

7. Nous avons parlé (Chap. VII) des conditions du cycle fermé dans le cas linéaire. D'après les résultats du numéro précédent, nous voyons qu'elles correspondent à un cas spécial de permutabilité. C'est pourquoi, dans les cas où ces conditions seront vérifiées, nous pourrons appliquer la théorie de la permutabilité.

Cela simplifiera tous les résultats et comme dans les problèmes naturels, les conditions du cycle fermé sont généralement vérifiées, on voit l'intérêt de l'étude, ici entreprise, de la permutabilité.

Donnons-en tout de suite une application. Nous avons envisagé [1] les opérations

$$A_1 f = K f(t) + \int_0^t \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$A_2 f = (L + 2K) f(t) + \int_0^t [\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)] f(\tau)\, d\tau.$$

---

[1] Chapitre VIII, n° 1.

Si le principe du cycle fermé est vérifié, les noyaux $\varphi(t, \tau)$ et $\psi(t, \tau)$ auront la forme

$$\varphi(t-\tau), \qquad \psi(t-\tau),$$

et seront par conséquent permutables. Mais alors les opérations A_1 et A_2 seront aussi permutables. Donc, dans tous les calculs, on pourra regarder A_1 et A_2 comme des coefficients et considérer leur itération et leur composition comme des opérations de multiplication.

8. Il sera enfin utile, pour la suite, de considérer les extensions suivantes de la composition.

α. Soit a un paramètre indépendant de x, y et $aF_1(x, y)$ le produit de a par $F_1(x, y)$. Si les deux fonctions F_1 et F_2 sont permutables, il en sera de même de

$$a\,F_1(x, y) \quad \text{et} \quad b\,F_2(x, y).$$

La résultante de leur composition, que nous pourrons écrire

$$a\overset{*}{F}_1\,b\overset{*}{F}_2,$$

sera le produit par ab de la résultante de F_1 et F_2.

V. *En composant des polynomes de fonctions permutables, à coefficients constants, on obtient de nouvelles fonctions permutables, et la composition peut s'effectuer suivant les mêmes règles que le produit des polynomes.*

β. a et b étant deux constantes et F_1 et F_2 deux fonctions permutables, les fonctions

$$a + F_1(x, y), \qquad b + F_2(x, y)$$

n'appartiennent pas à l'ensemble des fonctions permutables avec F_1 et F_2 (sauf le cas très particulier où F_1 et F_2 seraient permutables avec l'unité). Nous pourrons pourtant les considérer comme permutables avec F_1 et F_2 et entre elles, en définissant ainsi leur composition :

$$(a + \overset{*}{F}_1)\overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_2(a + \overset{*}{F}_1) = a\,F_2 + \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2,$$

$$(a + \overset{*}{F}_1)(b + \overset{*}{F}_2) = (b + \overset{*}{F}_2)(a + \overset{*}{F}_1) = ab + a\,F_2 + b\,F_1 + \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2.$$

Les propriétés de la composition énoncées dans les numéros précédents se conservent quand on fait cette extension de la composition.

9. Avant d'appliquer, dans la fin de ce Chapitre, la théorie à la résolution des équations intégrales, nous allons étudier les séries de fonctions permutables.

Démontrons d'abord les résultats préliminaires suivants :

Lemme. — *Si* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *sont des fonctions de* x *et de* y *telles que*

$$|F_1| < m_1, \qquad |F_2| < m_2, \qquad \ldots, \qquad |F_n| < m_n,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ *étant des nombres fixes, on a*

$$(3) \qquad |\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 \ldots \overset{*}{F}_n| < \frac{m_1 m_2 \ldots m_n}{(n-1)!} |y-x|^{n-1}.$$

En effet

$$|\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2| < \left| \int_x^y m_1 m_2 \, d\xi \right| = m_1 m_2 |y-x|,$$

$$|\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_3| < \left| \int_x^y m_1 m_2 (\xi - x) m_3 \, d\xi \right| = \frac{m_1 m_2 m_3}{1.2} |y-x|^2,$$

et ainsi de suite. On obtient finalement l'équation (3).

Corollaire. — *Si* $|F_1| < m_1, \ldots, |F_n| < m_n$, *on a*

$$|\overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}| < \frac{m_1^{i_1} m_2^{i_2} \ldots m_n^{i_n}}{(i + i_2 + \ldots + i_n - 1)!} |y-x|^{i_1+i_2+\ldots+i_n-1}.$$

10. Le théorème fondamental sur les séries de fonctions permutables est alors :

Théorème. — *Soit*

$$(4) \qquad \sum_{i_1}^{\infty} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

une série des puissances des variables complexes

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

convergente lorsque

$$|z_1| < R_1, \quad |z_2| < R_2, \quad \ldots, \quad |z_n| < R_n.$$

Si nous remplaçons $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par les fonctions permutables $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et si nous supposons que les symboles de produits et de puissances appliqués à ces fonctions désignent des opérations de composition, nous obtiendrons une série convergente. Si $a_{0,0,\ldots,0}$ est nul (1), *cette série*

$$(5) \qquad \sum_{i_1}{}_0^\infty \sum_{i_2}{}_0^\infty \cdots \sum_{i_n}{}_0^\infty a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}$$

représentera une fonction permutable avec les fonctions données.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que, d'après la théorie classique des séries de puissances, on peut trouver un nombre positif M tel que

$$|a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}| < \frac{M}{R_1^{i_1} R_2^{i_2} \ldots R_n^{i_n}}.$$

Mais si

$$|F_1| < m_1, \quad |F_2| < m_2, \quad \ldots, \quad |F_n| < m_n,$$

on a

$$\left|\overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}\right| < \frac{m_1^{i_1} m_2^{i_2} \ldots m_n^{i_n}}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n - 1)!} (y - x)^{i_1+i_2+\ldots+i_n-1}.$$

Donc

$$\left|a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}\right| < \frac{M\,|y - x|^{i_1+i_2+\ldots+i_n-1}}{\left(\frac{R_1}{m_1}\right)^{i_1} \left(\frac{R_2}{m_2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{R_n}{m_n}\right)^{i_n} (i_1 + i_2 + \ldots + i_n - 1)!},$$

d'où l'on conclut facilement que la série (5) converge.

Il est intéressant de remarquer que *la série* (4) *n'est convergente en général que si les modules des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont inférieurs à certaines limites. Au contraire, la série* (5) *converge quels que soient les modules des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, à condition qu'ils soient finis.*

(1) Si $a_{0,0,\ldots,0}$ n'est pas nul, on pourrait toujours, grâce à l'extension précédente de la composition (n° 8, β), considérer cette série comme représentant une fonction permutable avec les fonctions données.

11. Le théorème précédent nous fournit une grande variété d'expressions qu'on peut construire à partir de fonctions permutables.

En effet, soit

$$(6) \qquad F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

une expression analytique quelconque développable en une série de puissances entières et positives de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ convergente dans un domaine autour du point $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. Il nous permet d'en déduire une fonction que nous noterons

$$(7) \qquad F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n),$$

obtenue en remplaçant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et en supposant que les symboles de produit et de puissance représentent des opérations de composition de première espèce.

C'est ainsi que sont définies, par exemple, les expressions suivantes :

$$\frac{\overset{*}{F}_1}{a - \overset{*}{F}_1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a + \overset{*}{F}_1}$$

égales respectivement à

$$\frac{F_1}{a} + \frac{\overset{*}{F}{}_1^2}{a^2} + \ldots + \frac{\overset{*}{F}{}_1^n}{a^n} + \ldots$$

et à

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{F_1}{a} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2}\,\frac{\overset{*}{F}{}_1^2}{a^2} + \ldots\right].$$

Dans la dernière expression, il faut préciser le signe de $\sqrt{a}$.

Le produit infini

$$\left[\overset{*}{F}_1\left(1 - \frac{\overset{*}{F}{}_1^2}{1}\right)\left(1 - \frac{\overset{*}{F}{}_1^2}{4}\right)\left(1 - \frac{\overset{*}{F}{}_1^2}{9}\right)\ldots\right]$$

a, de même, un sens tout à fait clair.

12. La composition de deux expressions

$$F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n), \qquad \Phi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n),$$

du type défini précédemment, s'effectuera par les mêmes règles que le produit algébrique des deux expressions correspondantes

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

C'est ainsi que la résultante de

$$\sqrt{a + \overset{*}{F}_1} \quad \text{et} \quad \sqrt{b + \overset{*}{F}_1}$$

peut s'écrire

$$\sqrt{(a + \overset{*}{F}_1)(b + \overset{*}{F}_2)}$$

avec, bien entendu, les signes convenables.

En outre on pourra effectuer, sur une expression de la forme (7), toutes les transformations qui ne modifient pas l'expression analytique correspondante (6). Par exemple, en composant $\dfrac{\overset{*}{F}_2}{a + \overset{*}{F}_1}$ avec $a + F_1$, on aura

$$\frac{\overset{*}{F}_2}{a + \overset{*}{F}_1}(a + \overset{*}{F}_1) = F_2.$$

13. Indiquons maintenant l'application des théories précédentes à la résolution des équations intégrales.

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction analytique du type (6) et soit l'équation

$$(a) \qquad F(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,$$

qui permet de définir z_n comme une fonction implicite de z_1, $z_2, \ldots, z_{n-1}$. Supposons qu'une branche de cette fonction soit nulle pour $z_1 = z_2 = \ldots z_{n-1} = 0$ et n'aie pas ce point comme *point de ramification*. On pourra développer cette branche dans le domaine du point $z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1} = 0$ en la série

$$(8) \qquad z_n = \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_{n-1}} b_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}}$$

(avec $b_{0,0,\ldots,0} = 0$) qui, substituée dans l'équation (a), la vérifie identiquement.

Ceci posé, remplaçons dans l'équation (a), $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par des fonctions permutables $F_1, F_2, \ldots, F_n$ comme nous l'avons fait

dans les numéros précédents et envisageons l'équation intégrale

$$\text{(A)} \qquad F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n) = 0,$$

F_n étant la fonction inconnue. Cette équation intégrale n'est pas linéaire en général. Effectuons dans la série (8) la même substitution de F_1, F_2, ..., F_n à z_1, z_2 ..., z_n, *nous obtiendrons une série convergente de fonctions permutables qui fournira la solution de l'équation intégrale* (A) ([1]).

Il est remarquable que *la série* (8) *n'exprime, en général, la solution de l'équation* (a) *que lorsque les modules de* z_1, z_2, ..., z_{n-1} *sont inférieurs à certaines limites, tandis que la série*

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_{n-1}} b_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \ldots \overset{*}{F}{}_{n-1}^{i_{n-1}}$$

donne la solution de l'équation intégrale (A) *quelles que soient les fonctions* F_1, F_2, ..., F_{n-1} *pourvu qu'elles soient finies.*

14. Voici un exemple simple des considérations précédentes : l'équation en s

$$r = s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots + \frac{s^n}{n!} + \ldots \qquad (= e^s - 1)$$

est vérifiée par la série

$$s = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n + \ldots \qquad [= \log(1 + r)],$$

tant que $|r| < 1$. L'équation intégrale en $S(x, y)$

$$R(x, y) = S(x, y) + \frac{\overset{*}{S}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{S}{}^3}{3!} + \ldots + \frac{\overset{*}{S}{}^n}{n!} + \ldots$$

admettra pour solution

$$S(x, y) = R(x, y) - \frac{1}{2} \overset{*}{R}{}^2 + \frac{1}{3} \overset{*}{R}{}^3 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n} \overset{*}{R}{}^n + \ldots,$$

quel que soit le module de $R(x, y)$.

([1]) On peut appliquer des procédés analogues à l'inversion d'une relation intégrale exprimée par une série de fonctions non permutables. *Voir* J. PÉRÈS, *Sulle equazioni integrali* (*Lincei Rend.*, 19 janvier 1913).

15. Un cas particulier intéressant est celui où la fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est un polynome entier de degré m par rapport à z_n. En posant alors $F_n = f$ l'équation (A) prend la forme

$$(\mathrm{A}') \quad (a_m + \overset{*}{\Phi}_m)\overset{*}{f}{}^m + (a_{m-1} + \overset{*}{\Phi}_{m-1})\overset{*}{f}{}^{m-1} + \ldots + (a_1 + \overset{*}{\Phi}_1)\overset{*}{f} = \Phi_0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ étant des constantes et $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ des fonctions connues de x et y permutables entre elles. Une telle équation est dite équation *intégrale* de degré m. Nous y supposerons $a_1 \neq 0$ pour être sûr qu'elle n'admet pas de point de ramification en $\Phi_0 = \Phi_1 = \ldots = \Phi_m = 0$. La règle donnée précédemment nous donnera alors sa solution sous la forme d'une série toujours convergente. Cette solution sera, comme d'ailleurs dans le cas général, une fonction permutable avec les fonctions données.

Particularisons encore en supposant $m = 1$. L'équation prend alors la forme

$$(a_1 + \overset{*}{\Phi}_1)\overset{*}{f} = \Phi_0,$$

c'est-à-dire, en supposant $a_1 = 1$,

$$f(x, y) + \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi = \Phi_0(x, y).$$

La solution est donnée par la formule

$$f = \frac{\overset{*}{\Phi}_0}{1 + \overset{*}{\Phi}_1} = \Phi_0 - \overset{*}{\Phi}_0 \overset{*}{\Phi}_1 + \overset{*}{\Phi}_0 \overset{*}{\Phi}{}_1^2 - \ldots;$$

on retrouve ainsi la formule de résolution des équations intégrales du premier degré à limites variables que nous avions donnée dans le Chapitre IV.

16. Supposons maintenant que l'équation soit du deuxième degré, on peut l'écrire

$$(\mathrm{A}'') \qquad (a_1 + \overset{*}{\Phi}_1)\overset{*}{f} + (a_2 + \overset{*}{\Phi}_2)\overset{*}{f}{}^2 = \Phi_0,$$

c'est-à-dire

$$a_1 f(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi + a_2 \int_x^y f(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi$$
$$+ \int_x^y \Phi_2(x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y f(\xi, \eta) f(\eta, y)\, d\eta = \Phi_0(x, y).$$

La solution sera donnée par la formule

$$f=\frac{-(a_1+\overset{*}{\Phi}_1)+\sqrt{(a_1+\overset{*}{\Phi}_1)^2+4(a_2+\overset{*}{\Phi}_2)\overset{*}{\Phi}_0}}{2(a_2+\overset{*}{\Phi}_2)},$$

et, en effectuant le développement en série, on l'obtiendra sous la forme d'une série de fonctions permutables qu'on sait *a priori* être convergente.

Il est intéressant de se demander s'il y a dans ces différents cas une seule solution. La réponse est affirmative. On peut le démontrer en employant une méthode analogue à celle qui nous a servi dans le Chapitre V (n° 4) pour montrer que l'équation intégro-différentielle du type elliptique n'a qu'une solution satisfaisant à certaines conditions au contour.

J'indiquerai cette démonstration pour l'équation intégrale (A′) du degré m envisagée au n° 15. J'aurai besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme. — *Que* F_1 *et* F_2 *soient ou non des fonctions permutables, on a la formule*

$$(9)\quad \overset{*}{F}{}_1^n-\overset{*}{F}{}_2^n=(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}{}_1^{n-1}+\overset{*}{F}_2(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}{}_1^{n-2}+\ldots+\overset{*}{F}{}_2^{n-1}(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2).$$

On le vérifie immédiatement.

En changeant le signe des deux membres de (9), puis en y permutant F_1 et F_2, on obtient la formule analogue

$$(9')\quad \overset{*}{F}{}_1^n-\overset{*}{F}{}_2^n=(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}{}_2^{n-1}+\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}{}_2^{n-2}+\ldots+\overset{*}{F}{}_1^{n-1}(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2).$$

Et, dans le cas particulier $n=2$, on tire de (9) et (9′) la relation

$$\overset{*}{F}{}_1^2-\overset{*}{F}{}_2^2=\frac{(\overset{*}{F}_1+\overset{*}{F}_2)(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)}{2}+\frac{(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)(\overset{*}{F}_1+\overset{*}{F}_2)}{2}$$

qui est une extension, au cas où F_1 et F_2 ne sont pas permutables de la relation

$$\overset{*}{F}{}_1^2-\overset{*}{F}{}_2^2=(\overset{*}{F}_1-\overset{*}{F}_2)(\overset{*}{F}_1+\overset{*}{F}_2)$$

valable quand F_1 et F_2 sont permutables.

Arrivons à la démonstration du théorème d'unicité :

Théorème. — *L'équation intégrale*

$$(a_m + \overset{*}{\Phi}_m)\overset{*}{f}{}^m + (a_{m-1} + \overset{*}{\Phi}_{m-1})\overset{*}{f}{}^{m-1} + \ldots + (a_1 + \overset{*}{\Phi}_1)\overset{*}{f} = \Phi_0$$

admet, la constante a_1 étant différente de zéro, une seule solution.

Si elle avait deux solutions f_1 et f_2, on aurait

$$(10)\quad (a_m + \overset{*}{\Phi}_m)(\overset{*}{f}{}_1^m - \overset{*}{f}{}_2^m) + (a_{m-1} + \overset{*}{\Phi}_{m-1})(\overset{*}{f}{}_1^{m-1} - \overset{*}{f}{}_2^{m-1}) + \ldots + \overset{*}{\Phi}_1(\overset{*}{f}_1 - \overset{*}{f}_2) = -a_1(f_1 - f_2),$$

d'où, en utilisant la formule (9),

$$(10')\quad -\frac{1}{a_1}\sum_2^m{}_i (a_i + \overset{*}{\Phi}_i)[(\overset{*}{f}_1 - \overset{*}{f}_2)\overset{*}{f}{}_1^{i-1} + \overset{*}{f}_2(\overset{*}{f}_1 - \overset{*}{f}_2)\overset{*}{f}{}_1^{i-2} + \ldots + \overset{*}{f}{}_2^{i-1}(\overset{*}{f}_1 - \overset{*}{f}_2)] - \frac{1}{a_1}\overset{*}{\Phi}_1(\overset{*}{f}_1 - \overset{*}{f}_2) = f_1 - f_2.$$

On en déduit aisément que $f_1 = f_2$. Soit, en effet, m une limite supérieure du module de $f_1 - f_2$, la relation (10′) donne, en remplaçant dans son premier membre $f_1 - f_2$ par m,

$$|f_1 - f_2| < \frac{mK}{a_1}|y - x|,$$

K étant un nombre facile à évaluer en fonction de limites supérieures des modules de $a_2, a_3, \ldots, a_m, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, f_1, f_2$. En substituant dans le premier membre de (10′) cette nouvelle limite supérieure de $|f_1 - f_2|$, on obtient

$$|f_1 - f_2| < m\left(\frac{K}{a_1}\right)^2 \frac{|y - x|^2}{2!}, \qquad \ldots.$$

En général, il vient

$$|f_1 - f_2| < m\left(\frac{K}{a_1}\right)^n \frac{|y - x|^n}{n!},$$

$f_1 - f_2$ a donc un module aussi petit qu'on veut, et par suite

$$f_1 = f_2.$$

La solution de l'équation (9) est unique et donnée par la règle précédemment indiquée.

Un procédé analogue permettra de prouver l'unicité de la solution de l'équation intégrale générale (A).

17. Au point où nous sommes arrivés nous pouvons résoudre simplement le problème de la sphère élastique, lorsque les tensions au contour sont données et que l'hérédité est linéaire.

En effet, comme nous allons le voir, on ramène (¹) ce problème à l'intégration d'une équation intégro-différentielle du deuxième ordre.

Celle-ci s'intègre moyennant la résolution d'une équation intégrale du second degré (nº 16) et par l'emploi de la transcendante entière $V(z \mid x, y)$ (Chap. VIII, nº 5).

Écrivons (²) en adoptant les mêmes notations qu'au Chapitre VI,

$$(11)\qquad \begin{cases} U = x t_{11} + y t_{12} + z t_{13}, \\ V = x t_{21} + y t_{22} + z t_{23}, \\ W = x t_{31} + y t_{32} + z t_{33}, \end{cases}$$

et posons

$$\Theta = 2(A_1 - A_2)\theta,$$

où A_1 et A_2 représentent les opérations que nous avons notées par les mêmes symboles dans le Chapitre VIII, nº 1.

On voit sans difficulté que, U, V, W, θ étant déterminées, la déformation de la sphère est connue.

Or si l'on suppose que les forces de masse soient nulles et le corps isotrope, on a d'abord $\Delta^2\Theta = 0$, et

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}, \qquad \Delta^2 t_{22} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}, \qquad \Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2},$$

$$\Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}, \qquad \Delta^2 t_{31} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial x}, \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y};$$

d'où l'on tire

$$\Delta^2 U = \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \Delta^2 V = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \Delta^2 W = \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$T = x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + y\frac{\partial\Theta}{\partial y} + z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Theta = r\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \Theta,$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(¹) *Cf.* VOLTERRA, *Deformazione di una sfera elastica soggetta a date tensioni, nel caso ereditario* (*Rend. dei Lincei*, 1910, 1ᵉʳ sem., p. 239).

(²) Nous nous servons d'un procédé analogue à celui qu'on emploie dans le cas ordinaire où l'on néglige l'hérédité. *Cf.* ALMANSI, *Sulle deformazione della sfera elastica* (*Memorie della R. Accademia di Torino*, anno 1896-1897).

T est une fonction harmonique, c'est pourquoi (*cf.* Chap. VIII, n° 3)

$$(12)\quad \begin{cases} U = U_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ V = V_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ W = W_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

où U_1, V_1, W_1 sont des fonctions harmoniques et R est une quantité constante. En outre, on a

$$(13)\quad r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r} - \theta\right).$$

L'origine étant au centre de la sphère et R étant son rayon, U_1, V_1, W_1 sont connues moyennant les tensions au contour.

En vertu des relations (11) et (12), on a

$$(14)\quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = t_{11} + t_{22} + t_{33}.$$

Mais pour les corps isotropes

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{22} + t_{33} &= (3A_2 - 4A_1)(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) \\ &= (3A_2 - 4A_1)\theta = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)^{-1}(3A_2 - 4A_1)\theta. \end{aligned}$$

Donc en posant

$$\theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z},$$

$$A_3 = (A_1 - A_2)^{-1}(3A_2 - 4A_1),$$

on a

$$\theta_1 + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = A_3\theta.$$

Éliminons θ entre cette équation et l'équation (13). On trouve

$$(15)\quad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - A_3\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{2}\left(\theta_1 - r\frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right).$$

Dès qu'on aura calculé f, on pourra déterminer les fonctions U, V, W, θ à cause des équations (12) et (14).

Or f dépend de l'équation intégro-différentielle (15). C'est l'équation à laquelle on voulait parvenir. Remplaçons dans cette

équation les lettres r et t par les lettres z et y, le second membre par φ, et désignons les opérations $-A_3$ et $-\frac{1}{2}A_3$ par $2M_1$ et M_2. L'équation (15) s'écrira alors

$$z^2 \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} + z M_1 \frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + M_2 f(y,z) = \varphi(y,z),$$

$\varphi(y, z)$ étant connue, $f(y, z)$ inconnue, M_1 et M_2 désignant les opérations suivantes :

$$M_1 \psi(y) = m_1 \psi(y) + \int_0^y \psi(x)\,\mu_1(x,y)\,dx,$$

$$M_2 \psi(y) = m_2 \psi(y) + \int_0^y \psi(x)\,\mu_2(x,y)\,dx.$$

Dans ces dernières relations μ_1 et μ_2 sont, dans le cas le plus général, que la condition du cycle fermé soit vérifiée ou non, des *fonctions permutables* connues, et m_1, m_2 des constantes connues.

Posons alors

$$X_1 \psi(y) = x_1 \psi(y) + \int_0^y \psi(x)\,\xi_1(x,y)\,dx,$$

$$X_2 \psi(y) = x_2 \psi(y) + \int_0^y \psi(x)\,\xi_2(x,y)\,dx;$$

il est facile de déterminer x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 de façon que

$$(X_1 + X_2)\psi = M_1 \psi,$$
$$X_1 X_2 \psi = M_2 \psi.$$

Il suffit de prendre pour x_1 et x_2 les racines de l'équation

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0$$

et pour ξ_1 et ξ_2 les solutions, que nous savons calculer d'après ce qui précède, des équations intégrales du second degré

$$\int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\xi_i(\zeta,y)\,d\zeta - \int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\mu_1(\zeta,y)\,d\zeta + (x_i - x_s)\,\xi_i(x,y)$$
$$= -\mu_2(x,y) + x_i\,\mu_1(x,y) \qquad (i, s = 1, 2).$$

Ces solutions sont données, nous le savons, par des séries très rapidement convergentes.

Les opérations X_1 et X_2 étant ainsi déterminées, l'équation (2)

pourra s'écrire

$$z\frac{\partial}{\partial z}\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}+\mathrm{X}_1 f(y,z)\right]+\mathrm{X}_2\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}+\mathrm{X}_1 f(y,z)\right]=\varphi(y,z),$$

d'où, en posant

$$z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}+\mathrm{X}_1 f(y,z)=f'(y,z), \tag{11}$$

on tire

$$z\frac{\partial f'(y,z)}{\partial z}+\mathrm{X}_2 f'(y,z)=\varphi(y,z). \tag{12}$$

On obtiendra donc $f'(y, z)$ puis $f(y, z)$ par la résolution de deux équations intégro-différentielles du premier ordre. Or, nous avons, dans le Chapitre précédent, étudié les équations de ce type et vu comment l'introduction de la transcendante $\mathrm{V}(z \mid x, y)$ permet de les résoudre. Le problème est donc complètement traité.

Cette question de la sphère élastique soumise à des tensions données dans le cas héréditaire se rencontre dans l'étude de la rotation de la Terre. Il est évident, en effet, que si l'on veut tenir compte de l'élasticité de la Terre, il est *impossible de négliger les phénomènes d'hérédité*. L'analyse précédente fournit la solution complète du problème par des séries qu'on sait, *a priori, toujours convergentes et même rapidement convergentes.*



CHAPITRE X.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES.

1. Généralisation d'un résultat précédent. — 2. Il permet de déduire d'une équation différentielle dont on connaît une solution, une équation intégro-différentielle dont on connaît une solution. — 3. Application à l'équation considérée dans le Chapitre V. — 4. Autre application aux fonctions elliptiques. — 5. Transformations des théorèmes d'addition. — 6. Le théorème d'addition de la fonction $V(z|x, y)$. — 7. Relation de la théorie avec d'autres ordres de recherches.

---

1. Nous allons maintenant laisser de côté l'étude, abordée dans le dernier Chapitre (n°s 13 et suivants), de la résolution des équations intégrales et passer à l'étude plus générale et plus intéressante des équations intégro-différentielles ([1]).

Nous commencerons par généraliser les résultats obtenus dans le Chapitre précédent au n° 13.

Soit la série des puissances

$$(1)\qquad F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \Sigma_{i_1}\Sigma_{i_2}\ldots\Sigma_{i_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\ldots z_n^{i_n},$$

avec $a_{0,0,\ldots 0} = 0$ et supposons cette série convergente dans un certain domaine autour de l'origine.

Remplaçons-y $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par $z_1 F_1, z_2 F_2, \ldots, z_n F_n$, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ étant n fonctions permutables de x et y, et considérons les multiplications appliquées aux F comme des opérations de composition. Nous obtiendrons une fonction que nous pourrons noter

$$F(z\overset{*}{F}_1, z_2\overset{*}{F}_2, \ldots, z_n\overset{*}{F}_n)$$

ou

$$(2)\qquad F(z_1, z_2, \ldots, z_n | x, y),$$

([1]) *Cf.* Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Rend. dei Lincei*, 1910, 1er sem., p. 169, § 6).

mettant ainsi en évidence le fait qu'elle dépend des variables z_1, z_2, ..., z_n et aussi de x et y. En vertu d'un théorème précédent (Chap. IX, n° 9), cette fonction sera une fonction entière de z_1, z_2, ..., z_n. Elle sera en outre permutable avec F_1, F_2, ..., F_n.

Ainsi, partant d'une transcendante quelconque ayant un certain domaine de convergence, nous lui associons une nouvelle transcendante dont le domaine de convergence est infini et qui est donc une fonction entière.

2. Soit alors une relation algébrique entre z_1, z_2, ..., z_n, la fonction (1) et ses dérivées jusqu'à un certain ordre :

$$(a)\qquad \Phi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n \,\Big|\, F, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial F}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} F}{\partial z_1^{p_1} \partial z_2^{p_2} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \ldots\right) = 0.$$

Remplaçons

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n \qquad \text{par} \qquad z_1\xi_1, \quad z_2\xi_2, \quad \ldots, \quad z_n\xi_n,$$

et

$$F \qquad \text{par} \qquad \frac{f}{\xi_0},$$

ξ_0, ξ_1, ..., ξ_n étant des paramètres indépendants de z_1, z_2, ..., z_n. L'équation (a) devient

$$\Phi\left(z_1\xi_1, z_2, \xi_2, \ldots, z_n\xi_n \,\Big|\, \frac{f}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_0\xi_1}\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{1}{\xi_0 \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2} \ldots \xi_n^{p_n}} \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1} \partial z_2^{p_2} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \ldots\right) = 0,$$

ou, en la réduisant à sa forme entière,

$$(a')\qquad \Psi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \,|\, f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots\right) = 0;$$

elle est identiquement vérifiée par

$$f = \xi_0 F(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \ldots, z_n\xi_n).$$

Ce résultat subsiste si nous remplaçons ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n par des fonctions permutables F_1, F_2, ..., F_n, et ξ_0 par une constante ou une fonction permutable F_0 (de façon qu'en tous cas f soit, elle aussi, permutable avec F_1, F_2, ..., F_n), si nous considérons enfin les produits et les puissances de

$$F_0, \quad F_1, \quad \ldots, \quad F_n, \quad f, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}, \quad \ldots$$

comme des compositions. L'équation (a') devient alors une équation intégro-différentielle dont nous connaissons une solution. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème. — *L'équation intégro-différentielle*

$$(A) \qquad \Psi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n \mid \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_n \mid \overset{*}{f}, \frac{\partial \overset{*}{f}}{\partial z_1}, \frac{\partial \overset{*}{f}}{\partial z_2}, \ldots\right)$$

est satisfaite par la fonction entière de $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n \mid x, y) = \overset{*}{F}_0 \overset{*}{F}(z_1 \overset{*}{F}_1, z_2 \overset{*}{F}_2, \ldots, z_n \overset{*}{F}_n).$$

Ainsi le même procédé qui nous permettait de passer des équations algébriques et transcendantes aux équations intégrales nous fait passer aussi des équations différentielles ordinaires aux équations intégro-différentielles.

Et dans ce cas encore, nous constatons que le passage en question simplifie la solution puisqu'une solution de l'équation différentielle valable dans un certain domaine, devient une *solution entière* de l'équation intégro-différentielle.

3. Donnons tout de suite des applications des considérations précédentes.

Revenons à l'équation intégro-différentielle

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, t)}{\partial z^2} + \int_t^\theta \left[\frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, \tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, \tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \theta, \tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t)\right] d\tau = 0,$$

que nous avons étudiée dans le Chapitre V.

La partie la plus difficile de notre étude fut, nous l'avons vu, la recherche de la solution fondamentale. Nous allons reprendre cette recherche ([1]) dans le cas où $f(\tau, t)$, $\varphi(\tau, t)$, $\psi(\tau, t)$ sont des fonctions permutables, et constater qu'elle ne présente plus de

---

([1]) *Cf.* Volterra, *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali* (*Lincei Rend.*, 1910, 1er sem., p. 361). Consulter aussi *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 160.

difficultés, qu'elle n'est plus qu'un jeu par l'application du théorème général du numéro précédent [1].

Le cas où f, φ, ψ sont permutables est d'ailleurs le plus intéressant : il se présentera, en effet, quand ces trois fonctions sont de forme

$$f(t-\tau), \quad \varphi(t-\tau), \quad \psi(t-\tau),$$

c'est-à-dire quand la condition du cycle fermé est réalisée. Mais les problèmes de magnétisme (*cf.* Chap. VII) qui introduisent l'équation (3) vérifient précisément la condition du cycle fermé.

Pour appliquer les considérations précédentes à l'équation (3), écrivons l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(1+z_1)+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(1+z_2)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(1+z_3)=0, \tag{3'}$$

z_1, z_2, z_3 étant trois nouvelles quantités arbitraires.

On peut déduire l'équation (3) de cette équation par le procédé général que nous venons d'indiquer pour déduire une équation intégro-différentielle d'une équation différentielle. Le même procédé nous permettra donc de déduire de la solution fondamentale de l'équation (3′) celle de l'équation (3), et nous serons sûrs *a priori* que la série qui nous donnera cette solution est toujours convergente, quels que soient les modules de

$$f, \quad \varphi, \quad \psi.$$

Pour la former effectivement, posons

$$1+z_1=\frac{1}{1-\zeta_1}, \qquad 1+z_2=\frac{1}{1-\zeta_2}, \qquad 1+z_3=\frac{1}{1-\zeta_3}; \tag{4}$$

la solution fondamentale de (3′) s'écrira

$$U=\frac{\zeta}{\sqrt{x^2(1-\zeta_1)+y^2(1-\zeta_2)+z^2(1-\zeta_3)}}, \tag{6}$$

ζ étant un paramètre quelconque indépendant de x, y, z. En posant

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

---

[1] Dans le même cas on peut résoudre les deux problèmes aux limites envisagés au Chapitre V. *Cf.* J. Pérès, *Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégro-différentielle de M. Volterra* (*Rend. di Palermo*, 1913).

elle admettra le développement en série

$$(7)\quad U = \frac{\zeta}{r}\left\{1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\zeta_1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2\zeta_2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2\zeta_3\right]^n\right\}.$$

Les équations (5) donnent enfin

$$(8)\quad \begin{cases} \zeta_1 = z_1 - z_1^2 + z_1^3 - \ldots, \\ \zeta_2 = z_2 - z_2^2 + z_2^3 - \ldots, \\ \zeta_3 = z_3 - z_3^2 + z_3^3 - \ldots. \end{cases}$$

Les séries (7) et (8) sont convergentes si z_1, z_2, z_3 ont des modules assez petits. Mais si nous y remplaçons z_1, z_2, z_3 par f, φ, ψ, ζ par une fonction $\chi(\tau, t)$ permutable avec f, φ, ψ, et si nous y considérons les opérations de *puissance* et de *multiplication* comme des *compositions*, nous obtiendrons des séries *convergentes quels que soient les modules de f, φ, ψ et fournissant la solution fondamentale cherchée.* Si l'on pose

$$\begin{aligned} F(\tau, t) &= f(\tau, t) - \overset{*}{f}{}^2(\tau, t) + \overset{*}{f}{}^3(\tau, t) - \ldots, \\ \Phi(\tau, t) &= \varphi(\tau, t) - \overset{*}{\varphi}{}^2(\tau, t) + \overset{*}{\varphi}{}^3(\tau, t) - \ldots, \\ \Psi(\tau, t) &= \psi(\tau, t) - \overset{*}{\psi}{}^2(\tau, t) + \overset{*}{\psi}{}^3(\tau, t) - \ldots, \end{aligned}$$

et

$$\Theta(x, y, z \mid \tau, t) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 F(\tau, t) + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \Phi(\tau, t) + \left(\frac{z}{r}\right)^2 \Psi(\tau, t),$$

a solution fondamentale de (3) s'écrit

$$u(x, y, z \mid \theta, t) = \frac{1}{r}\left\{\chi(\theta, t) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!} \times \int_t^\theta \chi(\theta, \tau)\,\overset{*}{\Theta}{}^n(x, y, z \mid \tau, t)\,d\tau\right\} \quad [1].$$

4. Voici un autre exemple d'application des considérations du n° **2** à un système d'équations différentielles. Soient les fonc-

---

[1] On pourra d'ailleurs prendre $\chi(\theta, t) = 1$ sans que l'expression précédente cesse de satisfaire à l'équation (3).

tions elliptiques sn, cn, dn. Elles satisfont au système

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sn} z) = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$
$$\frac{d}{dz}(\operatorname{cn} z) = - \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z,$$
$$\frac{d}{dz}(\operatorname{dn} z) = - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z.$$

Posons

$$\varphi_1 = \xi \operatorname{sn} \xi z, \qquad \varphi_2 = \xi \operatorname{cn} \xi z, \qquad \varphi_3 = \xi \operatorname{dn} \xi z,$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \varphi_2\varphi_3, \qquad \frac{d\varphi_2}{dz} = - \varphi_3\varphi_1, \qquad \frac{d\varphi_3}{dz} = - k^2 \varphi_1\varphi_2.$$

En outre, nous savons que φ_1, φ_2, φ_3 seront développables en séries valables dans le domaine de $\xi = 0$, $z = 0$ et de formes

$$\varphi_1 = a_1 \xi^2 z + a_2 \xi^4 z^3 + \ldots,$$
$$\varphi_2 = b_1 \xi + b_2 \xi^3 z^2 + \ldots,$$
$$\varphi_3 = c_1 \xi + c_2 \xi^3 z^2 + \ldots.$$

Remplaçons ξ par $F(x, y)$ et considérons les puissances de F comme des *compositions*. Nous obtiendrons les séries

$$\varphi_1(z \mid x, y), \qquad \varphi_2(z \mid x, y), \qquad \varphi_3(z \mid x, y),$$

représentant trois *transcendantes entières en z*. Elles vérifieront les équations intégro-différentielles

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz} &= \int_x^y \varphi_2(z \mid x, \xi)\, \varphi_3(z \mid \xi, y)\, d\xi, \\ \frac{d\varphi_2}{dz} &= -\int \varphi_3(z \mid x, \xi)\, \varphi_1(z \mid \xi, y)\, d\xi, \\ \frac{d\varphi_3}{dz} &= -k^2 \int_x^y \varphi_1(z \mid x, \xi)\, \varphi_2(z \mid \xi, y)\, d\xi \end{aligned} \right.$$

(il est d'ailleurs évident que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, envisagées comme fonctions de x et y, sont permutables entre elles). Les équations (9) ne sont pas linéaires et appartiennent à un type nouveau d'équations intégro-différentielles.

On pourrait encore généraliser différemment les fonctions ellip-

tiques en remplaçant le module k par une fonction permutable avec F. Il est facile de voir quelle forme prennent dans ce cas les équations intégro-différentielles.

5. Mais tout en donnant, par les théorèmes généraux énoncés, les fondements de la théorie, nous avons laissé de côté la propriété qui est peut-être la plus cachée et la plus importante des solutions ainsi trouvées des équations intégro-différentielles.

Cette propriété est la suivante : *les théorèmes d'addition des intégrales se conservent dans la transformation définie au n° 2, mais ils deviennent des théorèmes d'addition intégraux.*

Supposons, en effet, que $f(z_1, z_2, \ldots, z_n | \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ satisfasse à une relation algébrique de la forme

$$\Theta(f_z, f_u, f_{z+u} \,|\, z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, u_1, u_2, \ldots, u_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m) = 0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} f_z &= f(z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m), \\ f_u &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m), \\ f_{z+u} &= f(z_1+u_1, z_2+u_2, \ldots, z_n+u_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m). \end{aligned}$$

En remplaçant $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ par $F_0, F_1, \ldots, F_m$ et en considérant les multiplications comme indiquant des compositions, la nouvelle fonction

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m)$$

vérifiera l'équation

$$\Theta(\overset{*}{f}_z, \overset{*}{f}_u, \overset{*}{f}_{z+u} \,|\, z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, u_1, u_2, \ldots, u_n \,|\, \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} f_z &= f(z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m) \\ f_u &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n \,|\, \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m) \\ f_{z+u} &= f(z_1+u_1, z_2+u_2, \ldots, z_n+u_n \,|\, \overset{*}{F}_0, \overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m). \end{aligned}$$

Nous passons bien ainsi d'un théorème d'addition algébrique à un théorème d'addition intégral.

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{dU}{dz} = U,$$

elle est vérifiée par la série exponentielle

$$U = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots;$$

l'équation

$$\frac{dV}{dz} = V + 1$$

sera vérifiée par la série

$$V = z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

Remplaçons-y z par $z\xi$, elle devient

$$\frac{dV}{dz} = \xi V + \xi,$$

vérifiée par

$$V = z\xi + \frac{z^2\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n\xi^n}{n!} + \ldots.$$

Si enfin nous substituons $F(x, y)$ à ξ selon le procédé déjà souvent décrit, nous trouverons

$$(10) \quad V(z \mid x, y) = zF(x, y) + \frac{z^2}{2!}\overset{*}{F}{}^2(x, y) + \ldots + \frac{z^n \overset{*}{F}{}^n(x, y)}{n!},$$

c'est-à-dire la transcendante entière étudiée dans le Chapitre VIII. Elle vérifie l'équation intégro-différentielle

$$\frac{dV(z \mid x, y)}{dz} = F(x, y) + \int_x^y F(x, \xi)\, V(z \mid \xi, y)\, d\xi.$$

Elle admet aussi un théorème d'addition, que nous avons déjà indiqué, et qui se déduit aisément de celui de la fonction exponentielle. On a en effet

$$U(z + u) = U(z)\, U(u),$$

c'est-à-dire

$$V(z + u) = V(z) + V(u) + V(z)\, V(u),$$

d'où, en remplaçant les multiplications par des compositions, le

théorème d'addition intégral de la fonction (10)

$$(11)\quad V(z+u\,|\,x,y)=V(z\,|\,x,y)+V(u\,|\,x,y)+\int_x^y V(z\,|\,x,\xi)\,V(u\,|\,\xi,y)\,d\xi.$$

Nous l'avons déjà utilisé au Chapitre VIII.

On obtiendra de même, sans aucun calcul, les théorèmes d'addition intégraux des nouvelles transcendantes entières $\varphi_1(z|x,y)$, $\varphi_2(z|x,y)$, $\varphi_3(z|x,y)$: ils se déduiront des théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.

6. Peut-être avait-on trouvé peu direct le procédé qui nous a servi (Chap. VIII) à intégrer l'équation intégro-différentielle du premier ordre (a). Il devient, au contraire, extrêmement naturel après l'exposé de la théorie générale précédente.

Le théorème d'addition intégral de la fonction V peut prendre une forme plus générale. En effet, F_1 et F_2 étant deux fonctions permutables, on peut écrire

$$V(z\overset{*}{F}_1(x,y)+u\overset{*}{F}_2(x,y))=V(z\overset{*}{F}_1(x,y))+V(u\overset{*}{F}_2(x,y))$$
$$+V(z\overset{*}{F}_1(x,y)\,V(u\overset{*}{F}_2(x,y)).$$

Pour $F_1=F_2=F$ on retrouve le théorème énoncé précédemment.

7. Nous venons, en somme, de développer une *analyse* des fonctions permutables; on peut de même construire une algèbre des fonctions permutables tout à fait analogue à l'algèbre ordinaire. Cette étude a été faite par M. Evans [1].

Terminons par une remarque qui met en évidence un lien intéressant entre ces considérations et une autre théorie de l'analyse. Si l'on prend pour fonction $F(x,y)$ l'unité, on a

$$F=1,\qquad \overset{*}{F}{}^2=\frac{y-x}{1},\qquad \overset{*}{F}{}^3=\frac{(y-x)^2}{1.2},\qquad \ldots.$$

Par suite, si la série

$$a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

---

(1) *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili* (*Memorie Lincei*, série V, vol. VIII, 1911). — *L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili* (*Rend. Circolo di Palermo*, vol. XXXIV, 1912).

a un certain rayon de convergence, la série

$$a_1 z + a_2 z^2 \frac{y-x}{1} + \ldots + a_n z^n \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

aura un rayon de convergence infini. On retrouve ainsi le théorème fondamental qui a servi à M. Borel dans ses recherches, maintenant classiques, sur les séries divergentes et sur l'étude des séries en dehors de leur cercle de convergence.



CHAPITRE XI.

ÉTUDE DES FONCTIONS PERMUTABLES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1-2. Détermination de toutes les fonctions permutables avec une fonction du premier ordre. — 3-5. Propriétés des fonctions permutables. Définition des fonctions des divers ordres entiers supérieurs à 1. — 6. Détermination des fonctions permutables avec une fonction du deuxième ordre. — 7-11. Application des résultats précédents à la résolution des équations intégrales à points critiques.

---

1. Nous avons (Chap. IX, n° 6) appris à trouver toutes les fonctions permutables avec l'unité et nous avons ainsi obtenu l'ensemble des noyaux vérifiant la condition du cycle fermé.

Le problème plus général qui se pose maintenant et que nous allons résoudre est le suivant : *une fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ étant donnée, trouver toutes les fonctions permutables avec elle.*

Nous supposerons d'abord, quitte à revenir sur les autres cas, que la fonction donnée $\mathfrak{F}(x,y)$ est telle que

$$\mathfrak{F}(x, x) \gtrless 0;$$

nous dirons dans ce cas que $\mathfrak{F}$ est du premier ordre. Nous simplifierons enfin le problème par l'application de deux lemmes préliminaires faciles à démontrer [1] et que voici :

a. $\Phi(x,y)$ et $\mathfrak{F}(x,y)$ étant deux fonctions permutables, si l'on fait le changement de variable

$$x = f(x_1), \qquad y = f(y_1), \qquad \xi = f(\xi_1),$$

et qu'on pose

$$\mathfrak{F}_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{f'(x_1)f'(y_1)}\,\mathfrak{F}(x_1, y_1),$$
$$\Phi_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{f'(x_1)f'(y_1)}\,\Phi(x_1, y_1),$$

---

[1] *Cf.* VOLTERRA, *Sopra le funzioni permutabili* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1910, p. 425).

les nouvelles fonctions $\mathcal{F}_1(x_1, y_1)$, $\Phi_1(x_1, y_1)$ sont aussi permutables.

b. Les fonctions

$$\mathcal{F}_2(x_1, y_1) = \mathcal{F}_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

$$\Phi_2(x_1, y_1) = \Phi_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

sont permutables en même temps que $\mathcal{F}_1$ et Φ_1.

Le lemme *a* permet de remplacer la fonction $\mathcal{F}(x, y)$ par une fonction $\mathcal{F}_1(x_1, y_1)$ telle que

$$\mathcal{F}_1(x_1, x_1) = 1,$$

et le lemme *b* permet enfin de remplacer $\mathcal{F}_1$ par $\mathcal{F}_2$ telle que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1}\right)_{x_1=y_1} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial y_1}\right)_{x_1=y_1} = 0.$$

2. Nous pourrons donc supposer désormais, sans restreindre la généralité, que la fonction $\mathcal{F}$ vérifie les conditions

$$\mathcal{F}(x, x) = 1, \qquad F_1(x, x) = F_2(x, x) = 0,$$

en posant

$$F_1(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}.$$

Une fonction $\Phi(x, y)$ permutable avec $\mathcal{F}$ doit être telle que

$$\int_x^y \mathcal{F}(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\,\mathcal{F}(\xi, y)\,d\xi = \Psi(x, y).$$

On en tire

$$\Psi(x, x) = 0,$$

et

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \quad \Phi(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\,F_2(\xi, y)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = -\Phi(x, y) + \int_x^y F_1(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi,$$

d'où, en posant

$$F_2 - \overset{*}{F}{}_2^2 + \overset{*}{F}{}_2^3 - \ldots = f_2,$$

$$F_1 + \overset{*}{F}{}_1^2 + \overset{*}{F}{}_1^3 + \ldots = f_1,$$

on tire

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y)\, d\xi,$$

$$\Phi(x, y) = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi} f_1(x, \xi)\, d\xi.$$

$\Psi(x, y)$ doit donc satisfaire à l'équation intégro-différentielle

$$(1) \quad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(x, \xi) \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y) \right] d\xi = 0,$$

qu'il faut maintenant résoudre. Ensuite, l'une ou l'autre des deux formules précédentes déterminera $\Phi(x, y)$ en fonction de $\Psi(x, y)$.

Pour résoudre l'équation (1), remarquons qu'après une intégration par parties, elle prend la forme

$$(2) \quad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x, \xi) g_{12}(\xi, y) - \Psi(\xi, y) g_{21}(x, \xi)]\, d\xi = 0,$$

en posant

$$g_{12} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x}, \qquad g_{21} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}.$$

Il est alors facile de la réduire à une équation intégrale : il suffit d'appeler le dernier terme, c'est-à-dire l'intégrale, $\lambda(x, y)$ et d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \lambda(x, y) = 0.$$

En posant $2u = y - x$ et $2v = y + x$, on constate finalement ([1]) que l'équation intégro-différentielle (2) est équivalente à l'équation intégrale

$$(3) \quad \Psi(x, y) = \theta(u) - \int_x^y d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta - u, \xi) g_{12}(\xi, \zeta + u) - \Psi(\xi, \zeta + u) g_{21}(\zeta - u, \xi)]\, d\xi,$$

([1]) *Cf.* VOLTERRA, *Sopra le funzioni permutabili* (*Lincei Rend.*, 1910, 1er sem., p. 428).

$\theta(u)$ étant une fonction arbitraire assujettie seulement à s'annuler, comme $\Psi(x,y)$, pour $x=y$. On peut donc poser

$$\theta(u)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\,d\eta.$$

L'équation intégrale (3) se résout aisément. On démontre que, $\psi(u)$ étant donnée, elle admet une solution et une seule exprimée par la formule

$$\Psi(x,y)=\int_0^{2u}\psi(\eta)\sum_1^{\infty}{}_n\Psi_n(\eta\,|\,x,y)\,d\eta, \tag{4}$$

avec

$$\Psi_1(\eta\,|\,x,y)=1,$$

et

$$\Psi_n(\eta\,|\,x,y)=\int_u^v d\zeta\int_\eta^{2u}[\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta+u-\xi,\zeta+u)g_{21}(\zeta-u,\zeta+u-\xi)$$
$$-\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u,\xi+\zeta-u)g_{12}(\xi+\zeta-u,\zeta+u)]\,d\xi.$$

Ψ est ainsi déterminée et l'on en déduit immédiatement Φ.

Le problème de déterminer les fonctions permutables avec une fonction donnée $F(x,y)$ est donc résolu si l'on suppose

$$F(x,x)\gtrless 0.$$

3. Nous sommes maintenant en état de démontrer bien des propriétés remarquables des fonctions permutables.

Observons d'abord que la formule (4) donne

$$\lim_{y=x}\frac{\Psi(x,y)}{y-x}=\text{const.}$$

Mais puisque

$$\Psi(x,y)=\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi,$$

on a

$$\lim_{y=x}\frac{\Psi(x,y)}{y-x}=F(x,x)\,\Phi(x,x)=\Phi(x,x).$$

Donc

$$\Phi(x,x)=\text{const.}$$

Ce résultat est établi dans l'hypothèse où $F(x,y)$ vérifie les conditions posées au début du n° 2. Dans le cas général, en tenant compte des formules de transformation du n° 1, on en tire la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si les deux fonctions* $F(x,y)$ *et* $\Phi(x,y)$ *sont permutables et si* $F(x,x)\gtrless 0$, *on a toujours*

$$\frac{\Phi(x,x)}{F(x,x)} = \text{const.}$$

4. Supposons maintenant que la fonction Φ, permutable avec F, ait des dérivées premières finies, nous pourrons démontrer que :

THÉORÈME II. — *Si* $\Phi(x,x)=0$, *l'équation intégrale en* $\Psi(x,y)$,

$$\Phi(x,y) = \int_x^y F(x,\xi)\,\Psi(\xi,y)\,d\xi,$$

admet une seule solution permutable avec F *et* Φ.

En effet l'équation précédente se ramène, par une dérivation, à une équation de seconde espèce qui admet une solution et une seule. Cette solution est bien permutable avec F, donc aussi avec Φ, car de l'équation

$$\Phi = \overset{*}{F}\overset{*}{\Psi},$$

on tire

(5) $$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{F}(\overset{*}{F}\overset{*}{\Psi}),$$

(6) $$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F} = \overset{*}{F}(\overset{*}{\Psi}\overset{*}{F}).$$

Mais $\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}$, les équations (5) et (6) donnent alors

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Psi} = \overset{*}{\Psi}\overset{*}{F}.$$

Nous avons nommé (n° 1) fonctions du premier ordre toutes les fonctions Φ telles que

$$\Phi(x,x)\gtrless 0.$$

Admettons au contraire que $\Phi(x,x)$ soit identique à zéro et que la fonction $\Phi(x,y)$ ait des dérivées premières, nous aurons

$$\left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}\right)_{x=y} = -\left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}\right)_{x=y},$$

et si la valeur commune de ces deux dérivées est différente de zéro quel que soit x nous dirons la fonction Φ du second ordre.

En général la fonction Φ sera du $n^{\text{ième}}$ ordre si elle a des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus telles que :

1° Toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(n-2)$ inclus soient nulles pour $x=y$,

2° $$\left(\frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=y} = -\left(\frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{x=y} = \ldots = (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial y^{n-1}}\right)_{x=y} \gtrless 0.$$

Si enfin toutes les dérivées de la fonction Φ existaient et étaient nulles pour $x=y$ la fonction serait d'ordre infini; c'est le cas de la fonction

$$\Phi(x,y) = e^{-\frac{1}{(x-y)^2}}.$$

Bien entendu il existe des fonctions qui ne sont d'aucun des ordres définis précédemment : par exemple une fonction $\Phi(x,y)$ telle que $\Phi(x,x)$ s'annule pour certaines valeurs isolées de x.

La notion d'*ordre* ainsi introduite permet d'étendre de la façon suivante [1] le théorème II :

Théorème III. — *Φ et Ψ étant deux fonctions permutables respectivement de $n^{\text{ième}}$ ordre et de $m^{\text{ième}}$ ordre, l'équation*

$$\Phi = \overset{*}{\Psi}\overset{*}{\Theta}$$

admet, si $n > m$ et si Ψ a des dérivées $(n-1)^{\text{ièmes}}$, une seule solution Θ qui est permutable avec Φ et Ψ et d'ordre $n-m$ [2].

On en conclut aisément que si n et m sont des nombres premiers entre eux, on peut toujours trouver une fonction du premier ordre permutable avec Φ et Ψ. On en tire aussi facilement que *si Φ est une fonction d'ordre n et* F *une fonction du premier ordre, on peut trouver Ψ du premier ordre telle que*

$$\Phi = \overset{*}{F}{}^{n-1}\overset{*}{\Psi}.$$

5. Soit F une fonction du premier ordre et Φ une fonction permutable avec F, ces deux fonctions ayant des dérivées de tous les

(1) Volterra, *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1911, p. 296).

(2) Si Φ et Ψ ne sont pas permutables, Θ existera toujours, mais ne sera permutable ni avec Φ, ni avec Ψ.

ordres. Nous avons déjà vu qu'on a

$$\frac{\Phi(x,x)}{F(x,x)} = c_1,$$

c_1 étant une constante. La fonction

$$\Phi(x,y) - c_1 F(x,y)$$

est donc nulle pour $x=y$. C'est pourquoi on peut écrire

$$\Phi(x,y) - c_1 F(x,y) = \int_x^y F(x,\xi)\,\Phi_1(\xi,y)\,d\xi,$$

d'où

$$\Phi(x,y) = c_1 F(x,y) + \int_x^y F(x,\xi)\,\Phi_1(\xi,y)\,d\xi.$$

Cette formule est analogue à celle de Lagrange.

En l'appliquant à Φ_1, qui est aussi permutable avec F, on a

$$\Phi_1(x,y) = c_2 F(x,y) + \int_x^y F(x,\xi)\,\Phi_2(\xi,y)\,d\xi,$$

d'où

$$\Phi(x,y) = c_1 F(x,y) + c_2 \overset{*}{F}{}^2(x,y) + \int_x^y \overset{*}{F}{}^2(x,\xi)\,\Phi_2(\xi,y)\,d\xi.$$

En continuant de même, on obtient enfin

$$\Phi(x,y) = c_1 F(x,y) + c_2 \overset{*}{F}{}^2(x,y) + \ldots + c_n \overset{*}{F}{}^n(x,y) + \int_x^y \overset{*}{F}{}^n(x,\xi)\,\Phi_n(\xi,y)\,d\xi,$$

formule analogue à la formule de Taylor. Si, quand n tend vers l'infini, le terme complémentaire tend vers o, $\Phi(x,y)$ sera représentée par la série

$$\Phi(x,y) = c_1 F(x,y) + c_2 \overset{*}{F}{}^2(x,y) + \ldots + c_n \overset{*}{F}{}^n(x,y) + \ldots,$$

analogue à la série de Taylor. Il est d'ailleurs évident que ce développement ne sera pas toujours possible [1].

---

[1] Il suffit pour s'en rendre compte de revenir au cas particulier $F(x,y) = 1$. On a alors

$$\overset{*}{F}{}^n(x,y) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

et le développement précédent est le *développement de Taylor* suivant les puissances de $(y-x)$, de la fonction $\Phi(y-x)$. On sait qu'il ne représente pas toujours la fonction.

Mais ici se présente naturellement une remarque : toutes les fonctions Φ possédant un tel développement *sont permutables entre elles. Cette propriété est-elle générale? Toutes les fonctions permutables avec une fonction donnée sont-elles permutables entre elles?*

La réponse est affirmative, comme l'a démontré récemment M. Vessiot (¹). Contentons-nous de remarquer ici que, dans un cas particulier, la proposition est immédiate : si l'on cherche les fonctions permutables avec une fonction du premier ordre

$$\psi(y-x),$$

on trouve, d'après les formules du n° 2, des fonctions de même forme

$$\Psi(y-x),$$

qui, par conséquent, sont permutables entre elles.

6. Nous avons trouvé toutes les fonctions permutables avec une fonction du premier ordre. Il est naturel de rechercher maintenant *toutes les fonctions permutables avec une fonction du deuxième ordre ou, en général, avec une fonction du* $m^{\text{ième}}$ *ordre*. Nous verrons, plus loin, la raison de cette recherche.

Elle se résout dans le cas d'une fonction du *deuxième ordre* par un procédé tout à fait analogue à celui du n° 2 (²) : soit $\mathfrak{F}(x,y)$ la fonction donnée du deuxième ordre, on constate d'abord qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que

$$\mathfrak{F}(x,x)=0, \qquad \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\right)_{x=y}=-1, \qquad \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\right)_{x=y}=1,$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x^2}\right)_{x=y}=0, \qquad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=y}=0, \qquad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial y^2}\right)_{x=y}=0.$$

Une fonction $\Phi(x,y)$ permutable avec $\mathfrak{F}$ est telle que

$$\Psi(x,y)=\int_x^y \mathfrak{F}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Phi(x,\xi)\,\mathfrak{F}(\xi,y)\,d\xi.$$

(¹) *Cf.* Vessiot, *Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 1912, p. 682).

(²) *Cf.* Volterra, *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Lincei Rend.*, 1ᵉʳ semestre 1911, p. 296).

On en tire, grâce aux hypothèses précédentes,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Phi(x, y) + \int_x^y \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2}(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Phi(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\,\frac{\partial^2 \mathfrak{F}(\xi, y)}{\partial y^2}\,d\xi.$$

Il est alors facile de prouver par des intégrations par parties que Ψ satisfait à l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + [\lambda_2(y) + \lambda_1(x)]\,\Psi(x, y) + \int_x^y [\mu_{11}(x, \xi)\,\Psi(\xi, y) + \mu_{22}(\xi, y)\,\Psi(x, \xi)]\,d\xi = 0,$$

λ_1, λ_2, μ_{11} et μ_{22} étant des fonctions connues.

On intègre cette équation par un procédé analogue à celui qui a servi au n° **2** à traiter l'équation intégro-différentielle (2) : on la ramène, par résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \lambda(x, y),$$

à une équation intégrale que l'on résout enfin de plusieurs manières, par exemple par approximations successives.

On en conclut finalement toutes les fonctions permutables avec la fonction du deuxième ordre $\mathfrak{F}$. Si, en particulier, $\mathfrak{F}$ appartient au groupe du cycle fermé, on trouve ainsi des fonctions appartenant à ce même groupe.

Dans le cas où la fonction $\mathfrak{F}$ est du troisième ordre ou d'ordre supérieur, la question n'est pas encore complètement résolue [1].

Il faudrait aussi s'occuper de la recherche des fonctions permutables avec une fonction qui n'a pas un ordre déterminé, qui est telle par exemple que $F(x, x)$ s'annule en quelques points isolés [2].

7. Nous avons résolu l'équation intégrale

$$F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n) = 0,$$

---

(1) Le cas où $\mathfrak{F}$ est analytique a été traité par M. Pérès (*Comptes rendus*, 1er sem. 1913).

(2) *Voir* sur ce sujet une Note de M. Pérès, à paraître prochainement dans les *Lincei Rend.*

qui correspond à l'équation

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

dans le cas où le point $z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1} = 0$ n'est pas un point de ramification de la fonction implicite $z_n(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$.

Les considérations précédentes, et c'est là leur intérêt, *vont nous permettre de passer au cas des points de ramification.*

Nous le montrerons d'abord dans les cas les plus simples [1].

Φ *étant une fonction donnée du deuxième ordre, soit à trouver une fonction* F *telle que*

$$\overset{*}{F}{}^2 = \Phi,$$

c'est-à-dire

$$\int_x^y F(x, \xi) F(\xi, y) \, d\xi = \Phi(x, y).$$

Puisque Φ est du deuxième ordre, nous savons trouver toutes les fonctions permutables avec elle. Soit $\Psi(x, y)$ l'une de ces fonctions, quelconque mais du premier ordre. Nous pourrons toujours, par application des transformations indiquées précédemment [2], nous réduire au cas où

$$\lim_{x=y} \frac{\Phi(x, y)}{y - x} = 1.$$

La fonction $\Psi(x, x)$ sera alors une constante différente de zéro que nous pourrons toujours prendre égale à 1.

Ceci posé, formons la fonction

$$\Phi(x, y) - \overset{*}{\Psi}{}^2(x, y) = \mu(x, y);$$

on voit facilement qu'elle est du troisième ordre ou d'ordre supérieur, et que l'équation

$$(7) \qquad \mu = \overset{*}{\Psi}{}^2 \overset{*}{\chi}$$

admet donc une solution χ du premier ordre ou d'ordre supérieur (*cf.* n° 4, théorème III). La fonction χ s'obtient simplement en réduisant par deux dérivations l'équation (7) à une équation intégrale de deuxième espèce.

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Contributo allo studio delle funzioni permutabili*, p. 298.

(2) N° 1, *a* et *b*.

La fonction χ étant ainsi déterminée, formons la série toujours convergente

$$F = \Psi + \frac{1}{2}\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\chi} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\chi}{}^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\chi}{}^3 + \ldots.$$

On aura

$$\overset{*}{F}{}^2 = \overset{*}{\Psi}{}^2 + \overset{*}{\Psi}{}^2\overset{*}{\chi} = \Phi(x, y),$$

et le problème que nous nous proposions est ainsi résolu.

8. Il est aussi facile de résoudre l'équation intégrale

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi,$$

Φ étant une fonction donnée du $n^{\text{ième}}$ ordre, quand on connaît une fonction Ψ du premier ordre permutable avec Φ. On pourra, en effet, toujours supposer que

$$\lim_{y=x} \frac{\Phi(x, y)}{(y-x)^{n-1}} = \lim_{y=x} \frac{\overset{*}{\Psi}{}^n(x, y)}{(y-x)^{n-1}} = 1;$$

en résolvant alors l'équation intégrale en χ

$$\Phi - \overset{*}{\Psi}{}^n = \overset{*}{\Psi}{}^n\overset{*}{\chi},$$

on aura

$$F = \Psi + \frac{1}{n}\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\chi} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\chi}{}^2 + \ldots.$$

Quand Φ appartient au groupe du cycle fermé, on connaît une infinité de fonctions du premier ordre permutables avec elle, c'est pourquoi on résout aisément les équations de forme [1]

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi.$$

9. Nous avons laissé de côté la question de savoir combien de solutions a l'équation

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi.$$

Occupons-nous d'abord du cas où $n = 2$

$$\overset{*}{F}{}^2 = \Phi, \tag{8}$$

---

[1] J'ai aussi donné (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1910, p. 434) une méthode directe pour résoudre cette équation.

nous avons trouvé une solution F de cette équation, mais il est évident que la fonction — F la vérifie aussi. On peut prouver que ce sont les deux seules solutions de l'équation (8).

La démonstration repose sur le lemme suivant : $\mathfrak{F}(x,y)$ *étant une fonction du premier ordre* $[\mathfrak{F}(x,x)\gtrless 0]$, *l'équation intégrale*

$$\int_x^y \mathfrak{F}(x,\xi)\Phi(\xi,y)\,d\xi = \alpha\int_x^y \Phi(x,\xi)\mathfrak{F}(\xi,y)\,d\xi$$

n'a pas d'autre solution que $\Phi(x,y)=0$ *si* $\alpha\gtrless 1$.

En effet, on peut toujours (*cf.* n° **1**) supposer

$$\mathfrak{F}(x,x)=1,\qquad \left[\frac{\partial\mathfrak{F}(x,y)}{\partial x}\right]_{x=y}=[F_1(x,y)]_{x=y}=0,$$
$$\left[\frac{\partial\mathfrak{F}(x,y)}{\partial y}\right]_{x=y}=[F_2(x,y)]_{x=y}=0.$$

En posant

$$\Psi(x,y)=\int_x^y \mathfrak{F}(x,\xi)\Phi(\xi,y)\,d\xi=\alpha\int_x^y \Phi(x,\xi)\,\mathfrak{F}(\xi,y)\,d\xi,$$

les mêmes transformations qui nous ont conduits à l'équation (1) (n° **2**) nous conduiront à l'équation

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}$$
$$+\int_x^y\left[\frac{1}{\alpha}\Psi(x,\xi)g_{12}(\xi,y)-\Psi(\xi,y)g_{21}(x,\xi)\right]d\xi=0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y}+\lambda(x,y)=0.$$

Si nous posons

$$u=x-\alpha y,\qquad v=x-y,$$
$$x=\frac{u-\alpha v}{1-\alpha},\qquad y=\frac{u-v}{1-\alpha},$$

il vient enfin

$$\Psi(x,y)=\theta(u)-\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^v\lambda\left(\frac{u-\alpha\zeta}{1-\alpha},\frac{u-\zeta}{1-\alpha}\right)d\zeta,$$

$\theta(u)$ étant une fonction arbitraire. Mais la fonction $\Psi(x,x)$ doit

être identiquement nulle, et comme on a

$$\Psi(x, x) = \theta[(1-\alpha)x],$$

il en est de même de θ; par suite

$$\Psi(x, y) = -\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^v d\zeta \int_{\frac{u-\alpha\zeta}{1-\alpha}}^{\frac{u-\zeta}{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\alpha}\Psi\left(\frac{u-\alpha\zeta}{1-\alpha}, \xi\right) g_{12}\left(\xi, \frac{u-\zeta}{1-\alpha}\right) - \Psi\left(\xi, \frac{u-\zeta}{1-\alpha}\right) g_{21}\left(\frac{u-\alpha\zeta}{1-\alpha}, \xi\right)\right] d\xi.$$

De cette équation on déduit, en reprenant un raisonnement déjà fait bien des fois au cours de ces Leçons [1], que $|\Psi(x,y)|$ est plus petit que tout nombre fixé à l'avance et que, par suite, $\Psi(x,y) = 0$. On a alors aussi

$$\Phi(x, y) = 0.$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant démontrer que :

Théorème. — *Si l'on a*

$$\overset{*}{F}{}_1^2 = \Phi, \qquad \overset{*}{F}{}_2^2 = \Phi,$$

Φ étant une fonction du deuxième ordre, on doit avoir

$$F_1 = F_2 \qquad \text{ou} \qquad F_1 = -F_2.$$

La proposition serait immédiate si l'on savait que F_1 et F_2 sont des fonctions permutables, mais nous n'en savons rien *a priori*.

Nous savons seulement que

$$0 = \overset{*}{F}{}_1^2 - \overset{*}{F}{}_2^2 = \frac{1}{2}(\overset{*}{F}_1 - \overset{*}{F}_2)(\overset{*}{F}_1 + \overset{*}{F}_2) + \frac{1}{2}(\overset{*}{F}_1 + \overset{*}{F}_2)(\overset{*}{F}_1 - \overset{*}{F}_2).$$

Posons

$$F_1 - F_2 = F, \qquad F_1 + F_2 = \Phi,$$

des deux fonctions F et Φ, l'une au moins est du premier ordre,

---

[1] En admettant que

$$|\Psi(x, y)| < m$$

et en remplaçant $\Psi(x, y)$ par cette borne supérieure dans le second membre de l'équation, on obtient une nouvelle valeur de m, etc. Il est facile de montrer ensuite que les nombres m ainsi définis tendent vers zéro.

parce que F_1 et F_2 sont du premier ordre et telles que [1] $[F_1(x, x)]^2 = [F_2(x, x)]^2$. Supposons que F soit du premier ordre, l'équation

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = -\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}$$

entraîne (lemme)

$$\Phi = 0, \qquad \text{donc} \qquad F_1 = -F_2.$$

Si Φ était du premier ordre, on aurait de même

$$F_1 = F_2.$$

10. Par des procédés analogues à ceux du numéro précédent, nous pourrons étudier au même point de vue l'équation

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi, \tag{9}$$

où Φ est une fonction d'ordre n.

Soit F_1 une solution de cette équation, il est bien facile de voir que toutes les fonctions obtenues en multipliant F_1 par une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité seront de nouvelles solutions de cette équation. Nous obtenons ainsi n solutions distinctes de l'équation (9) et *il n'en existe pas d'autre*. Ce dernier point résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Si Φ est une fonction d'ordre n et si l'on a*

$$\overset{*}{F}{}_1^n = \Phi, \qquad \overset{*}{F}{}_2^n = \Phi,$$

on a nécessairement

$$F_1 = \varepsilon F_2,$$

ε étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Pour démontrer ce théorème, remarquons d'abord que Φ étant une fonction d'ordre n, F_1 et F_2 sont deux fonctions du premier ordre. On a de plus

$$\overset{*}{F}{}_1^n = \overset{*}{F}{}_2^n. \tag{10}$$

Cette dernière égalité, en la dérivant n fois et en y faisant ensuite $x = y$, nous donne

$$[F_1(x, x)]^n = [F_2(x, x)]^n;$$

et par conséquent, en multipliant au besoin F_2 par une racine $n^{\text{ième}}$

---

[1] Comparer n° 10.

de l'unité, nous pourrons toujours supposer que

$$F_1(x, x) = F_2(x, x).$$

Nous admettrons aussi que

$$F_1(x, x) = F_2(x, x) = 1,$$

$$\left[\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x}\right]_{x=y} = \left[\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\right]_{x=y} = \left[\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x}\right]_{x=y} = \left[\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y}\right]_{x=y} = 0;$$

nous pourrons toujours nous réduire à ce cas par l'application de transformations analogues à celles qui furent envisagées au n° **1**.

Il reste alors à prouver que, dans ces conditions et en vertu de l'égalité (10), on a

$$F_1(x, y) = F_2(x, y).$$

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et prenons ε_n égal à l'unité, posons

$$\Phi_i(x, y) = F_1(x, y) - \varepsilon_i F_2(x, y),$$

nous aurons

$$n(\overset{*}{F}{}_1^n - \overset{*}{F}{}_2^n) = \overset{*}{\Phi}_1 \overset{*}{\Phi}_2 \ldots \overset{*}{\Phi}_{n-1} \overset{*}{\Phi}_n + \overset{*}{\Phi}_2 \overset{*}{\Phi}_3 \ldots \overset{*}{\Phi}_n \overset{*}{\Phi}_1 + \overset{*}{\Phi}_3 \overset{*}{\Phi}_4 \ldots \overset{*}{\Phi}_1 \overset{*}{\Phi}_2 + \ldots + \overset{*}{\Phi}_n \overset{*}{\Phi}_1 \ldots \overset{*}{\Phi}_{n-2} \overset{*}{\Phi}_{n-1};$$

donc, d'après l'égalité (10),

$$\overset{*}{\Phi}_1 \overset{*}{\Phi}_2 \ldots \overset{*}{\Phi}_{n-1} \overset{*}{\Phi}_n + \overset{*}{\Phi}_2 \overset{*}{\Phi}_3 \ldots \overset{*}{\Phi}_n \overset{*}{\Phi}_1 + \overset{*}{\Phi}_3 \overset{*}{\Phi}_4 \ldots \overset{*}{\Phi}_1 \overset{*}{\Phi}_2 + \ldots + \overset{*}{\Phi}_n \overset{*}{\Phi}_1 \ldots \overset{*}{\Phi}_{n-2} \overset{*}{\Phi}_{n-1} = 0.$$

Posons

$$\overset{*}{\Phi}_i \overset{*}{\Phi}_{i+1} \ldots \overset{*}{\Phi}_{i-1} = f_i$$

et

$$\overset{*}{\Phi}_{i+1} \ldots \overset{*}{\Phi}_{i-1} = \varphi_i,$$

il viendra

(11) $$\overset{*}{f}_i = \overset{*}{\Phi}_i \overset{*}{\varphi}_i, \qquad \overset{*}{f}_{i+1} = \overset{*}{\varphi}_i \overset{*}{\Phi}_i$$

et

(10′) $$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 0.$$

Mais en dérivant les formules (11), nous obtiendrons

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = -(1-\varepsilon_i)\varphi_i(x,y) + \int_x^y \frac{\partial \Phi_i(x,\xi)}{\partial x}\varphi_i(\xi,y)\,d\xi$$

$$\frac{\partial f_{i+1}}{\partial y} = (1-\varepsilon_i)\varphi_i(x,y) + \int_x^y \varphi_i(x,\xi)\frac{\partial \Phi_i(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et, en résolvant ces équations intégrales,

$$-(1-\varepsilon_i)\varphi_i(x,y) = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \int_x^y \lambda_i(x,\xi)\frac{\partial f_i(\xi,y)}{\partial \xi}\,d\xi,$$

$$(1-\varepsilon_i)\varphi_i(x,y) = \frac{\partial f_{i+1}}{\partial y} + \int_x^y \frac{\partial f_{i+1}(x,\xi)}{\partial \xi}\mu_i(\xi,y)\,d\xi,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

avec

$$\lambda_i(x,x) = \mu_i(x,x) = 0.$$

On a finalement, après additions et intégrations par parties, les $n-1$ relations

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial x} + \dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial y} = \displaystyle\int_x^y [\Lambda_i(x,\xi)f_i(\xi,y) + f_{i+1}(x,\xi)M_i(\xi,y)]\,d\xi \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{array} \right.$$

et l'on tire de (10') la $n^{\text{ième}}$ relation

$$(13)\quad \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\int_x^y \sum_1^{n-1}{}_i [\Lambda_i(x,\xi)f_i(\xi,y) + f_{i+1}(x,\xi)M_i(\xi,y)]\,d\xi.$$

Il est facile de prouver que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ qui satisfont aux équations intégro-différentielles (12) et (13) et à l'équation (10') sont identiquement nulles. Nommons en effet u_1, $u_2, \ldots, u_n$ les seconds membres des équations (12) et (13), et posons

$$\varepsilon_h f_1 + \varepsilon_h^2 f_2 + \ldots + \varepsilon_h^n f_n = \Psi_h,$$

nous aurons

$$\frac{\partial \Psi_h}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_h}\frac{\partial \Psi_h}{\partial y} = \varepsilon_h u_1 + \ldots + \varepsilon_h^n u_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1);$$

d'où, après le changement de variables,

$$x - \varepsilon_h y = \xi_h,$$
$$x - y = \eta,$$
$$\Psi_h = \Theta_h(\xi_h) + \int_0^\eta V_h(\xi_h, \zeta)\, d\zeta \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1),$$

Θ_h étant une fonction arbitraire et V_h étant égal à

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_h - 1}(\varepsilon_h u_1 + \varepsilon_h^2 u_2 + \ldots + \varepsilon_h^n u_n).$$

Mais pour $x = y$ on doit avoir $\Psi_h = 0$, par suite

$$\Theta_h[(1 - \varepsilon_h)x] = 0,$$

et la fonction Θ_h est identiquement nulle. On a donc enfin les relations

$$\varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_1^2 f_2 + \ldots + \varepsilon_1^n f_n = \int_0^\eta V_1 \quad (\xi_1, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\varepsilon_2 f_1 + \varepsilon_2^2 f_2 + \ldots + \varepsilon_2^n f_n = \int_0^\eta V_2 \quad (\xi_2, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varepsilon_{n-1} f_1 + \varepsilon_{n-1}^2 f_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}^n f_n = \int_0^\eta V_{n-1}(\xi_{n-1}, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\varepsilon_n f_1 + \varepsilon_n^2 f_2 + \ldots + \varepsilon_n^n f_n = 0;$$

d'où l'on tire

$$(14) \quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\displaystyle\int_0^\eta V_1(\xi_1, \zeta)\, d\zeta + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\int_0^\eta V_2(\xi_2, \zeta)\, d\zeta + \ldots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{\varepsilon_{n-1}}\displaystyle\int_0^\eta V_{n-1}(\xi_{n-1}, \zeta)\, d\zeta\right], \\ f_2 = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\displaystyle\int_0^\eta V_1(\xi_1, \zeta)\, d\zeta + \dfrac{1}{\varepsilon_2^2}\int_0^\eta V_2(\xi_2, \zeta)\, d\zeta + \ldots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{\varepsilon_{n-1}^2}\displaystyle\int_0^\eta V_{n-1}(\xi_{n-1}, \zeta)\, d\zeta\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De ce dernier système (14) d'équations intégrales auxquelles satisfont les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ on peut enfin déduire, comme au numéro précédent, que les fonctions f_1, f_2, ..., f_n sont plus

petites que tout nombre fixé à l'avance et que, par suite, sont identiquement nulles. Mais de l'égalité

$$f_1 = \overset{*}{\Phi}_1 \overset{*}{\Phi}_2 \ldots \overset{*}{\Phi}_n = 0,$$

on conclut, puisque $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ sont des fonctions du premier ordre,

$$\Phi_n = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

11. Dès qu'on sait résoudre l'équation binome

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi,$$

on sait aussi résoudre le cas général. En effet, l'équation précédente peut s'écrire

$$F = \overset{*}{\Phi}{}^{\frac{1}{n}},$$

et permet de définir la puissance $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{ième}}$ de Φ; on définit encore aisément une puissance fractionnaire quelconque de Φ

$$\overset{*}{\Phi}{}^{\frac{m}{n}}.$$

Soit alors à résoudre l'équation en F_2

$$F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2) = 0,$$

déduite ([1]) d'une équation

$$F(z_1, z_2) = 0,$$

telle que la fonction implicite $z_2(z_1)$ ait un point critique en $z_1 = 0$. Une branche de cette fonction implicite s'exprime, on le sait, par une série des puissances fractionnaires de z_1 : en y remplaçant les puissances fractionnaires de z_1 par les puissances fractionnaires de F_1 que nous venons de définir, on obtiendra le développement cherché de F_2 ([2]).

([1]) Comme il a été précisé dans le Chapitre IX.

([2]) M. Lalesco remarque aussi une analogie avec les équations différentielles linéaires et la théorie de Fuchs. *Cf.* Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*. Paris, 1912, p. 139. Il serait intéressant de poursuivre cette analogie.

CHAPITRE XII.

LA PERMUTABILITÉ DE DEUXIÈME ESPÈCE.

1. Définition. — 2. Différences entre les deux permutabilités. Les fonctions permutables de deuxième espèce avec l'unité. — 3-7. Relations avec la théorie des substitutions; application à la résolution d'une équation intégrale.

---

1. Nous avons considéré jusqu'ici les fonctions *permutables de première espèce* telles que

$$\int_x^y F(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\,F(\xi, y)\,d\xi, \tag{1}$$

et la *composition de première espèce*. Il faut étudier maintenant une autre *permutabilité*. Nous la nommerons *permutabilité de deuxième espèce*, la composition correspondante étant *la composition de deuxième espèce* (¹).

Deux fonctions $F(x, y)$ et $\Phi(x, y)$ *seront dites permutables de deuxième espèce lorsqu'on aura*

$$\int_0^1 F(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi = \int_0^1 \Phi(x, \xi)\,F(\xi, y)\,d\xi. \tag{2}$$

L'opération

$$\int_0^1 F(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi$$

sera la composition de deuxième espèce des deux fonctions F *et* Φ.

Nous désignerons cette opération par le symbole

$$\overset{****}{F\,\Phi}(x, y) = \overset{****}{F\,\Phi} = \int_0^1 F(x, \xi)\,\Phi(\xi, y)\,d\xi,$$

à propos duquel on peut répéter la remarque faite (Chap. IX, n° 2)

(¹) *Cf.* Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Lincei Rend.*, 1er semestre 1910, p. 178).

sur le symbole $\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}$: on pourra suprimer les étoiles, écrire $F\Phi$ au lieu de $\overset{**}{F}\overset{**}{\Phi}$, toutes les fois que la confusion avec un produit ou une composition de première espèce sera impossible.

Les théorèmes fondamentaux démontrés sur la composition de première espèce ([1]) peuvent s'étendre à la composition de deuxième espèce. On obtient le résultat général suivant :

Soit un ensemble de fonctions permutables de deuxième espèce; des combinaisons linéaires et des compositions de deuxième espèce, appliquées aux fonctions de cet ensemble, donnent naissance à de nouvelles fonctions toujours permutables entre elles et avec les premières.

2. Il y a pourtant bien des différences entre les deux espèces de composition. Pour le montrer d'une manière frappante, cherchons par exemple les fonctions permutables de deuxième espèce avec l'unité.

Soit $F(x, y)$ une fonction arbitraire. Posons

$$\int_0^1 F(x, y)\,dx = \varphi(y), \qquad \int_0^1 F(x, y)\,dy = \psi(x)$$

et

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - \varphi(y) - \psi(x), \tag{3}$$

nous aurons

$$\int_0^1 \Phi(x, \xi)\,d\xi = -\int_0^1 \varphi(y)\,dy = -\int_0^1\int_0^1 F(x, y)\,dx\,dy$$

et de même

$$\int_0^1 \Phi(\xi, y)\,d\xi = -\int_0^1 \psi(x)\,dx = -\int_0^1\int_0^1 F(x, y)\,dx\,dy.$$

Toutes les fonctions de la forme (3) sont donc permutables avec l'unité.

Réciproquement d'ailleurs, toutes les fonctions permutables avec l'unité ont la forme (3). Soit, en effet, $\Psi(x, y)$ l'une d'elles.

([1]) Chapitre IX, n°s 1 à 5.

On aura

$$\int_0^1 \Psi(x, \xi)\, d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi, y)\, d\xi = c,$$

c étant une constante.

Posons

$$F(x, y) = \Psi(x, y) - 2c,$$

il viendra

$$\varphi(y) = -c, \qquad \psi(x) = -c,$$

et, par suite,

$$\Psi(x, y) = F(x, y) - \varphi(y) - \psi(x).$$

Nous avions constaté que toutes les fonctions permutables de première espèce avec l'unité forment le groupe du cycle fermé. Dans le cas de la permutabilité de deuxième espèce, les choses se passent, on vient de le voir, d'une manière toute différente.

Nous avions vu aussi que toutes les fonctions permutables de première espèce avec l'unité sont permutables entre elles. Cette propriété ne se vérifie même plus pour la permutabilité de deuxième espèce.

3. Avant de montrer, dans le prochain Chapitre, comment la théorie de la permutabilité de deuxième espèce s'applique à la résolution des équations intégrales et intégro-différentielles, nous développerons ici les relations annoncées dans le Chapitre II (nº **11**) entre la théorie des fonctions permutables (deuxième espèce) et celle des substitutions [1].

Soient des fonctions finies et continues

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x); \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x),$$

posons

$$\int_0^1 \varphi_s(x) f_i(x)\, dx = \lambda_{si}$$

et admettons que le déterminant des λ_{si} soit différent de zéro.

---

[1] *Cf.* Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di seconda specie e le equazioni integrali* (*Rend. dei Lincei*, 1er sem. 1911).

Considérons les fonctions

$$\text{(I)} \qquad F(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is} f_i(x) \varphi_s(y),$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(y).$$

Si nous opérons sur elles une composition de deuxième espèce, nous obtiendrons la fonction

$$\overset{****}{F\Phi}(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s c_{is} f_i(x) \varphi_s(y)$$

avec

$$c_{is} = \Sigma_h \Sigma_k a_{ih} \lambda_{hk} b_{ks}.$$

Pour représenter cette formule, nous pouvons écrire les substitutions

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1}, & \lambda_{n2}, & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

et nous aurons

$$C = A\Lambda B.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que F et Φ soient permutables de deuxième espèce est donc exprimée par la formule

$$A\Lambda B = B\Lambda A,$$

ou par la formule équivalente

$$(\Lambda A)(\Lambda B) = (\Lambda B)(\Lambda A),$$

et nous pouvons énoncer le résultat fondamental suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour la permutabilité des deux fonctions F *et* Φ *est que les substitutions* ΛA *et* ΛB *soient permutables entre elles.*

Les problèmes relatifs à la permutabilité des fonctions de forme (I) et (II) sont ainsi ramenés à des problèmes relatifs à des substitutions :

1° *La recherche des fonctions de forme* (I), *permutables de deuxième espèce avec la fonction* (II), *est réduite à la recherche des substitutions permutables avec une substitution donnée.* J'ai traité ailleurs ce dernier problème (*cf.* p. 42, note 2).

2° Nous avons, dans le deuxième Chapitre (n° 11), énoncé le résultat suivant : la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les substitutions permutables avec une substitution donnée soient permutables entre elles est que cette dernière substitution soit élémentaire. Il en résulte immédiatement que *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions* (I), *permutables avec* (II), *soient permutables entre elles est que la substitution* AB *soit élémentaire.*

4. Voici une application des résultats précédents à la résolution d'une équation intégrale.

Supposons la substitution AB élémentaire et soient F_0, F_1, F_2, ..., F_m, $m+1$ fonctions de type (I) permutables de deuxième espèce avec (II); elles seront aussi permutables entre elles.

Nous nous proposons de *trouver une fonction* F, *ayant la forme* (I) *et permutable avec* (II), *vérifiant l'équation intégrale de degré m*

$$\text{(III)} \qquad \overset{**}{F}_0 \overset{**}{F}{}^m + \overset{**}{F}_1 \overset{**}{F}{}^{m-1} + \overset{**}{F}_2 \overset{**}{F}{}^{m-2} + \ldots + \overset{**}{F}_{m-1} \overset{**}{F} + F_m = 0.$$

Si nous posons

$$F_h = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}^{(h)} f_i(x)\, \varphi_s(y)$$

et

$$A_h = \begin{Bmatrix} a_{11}^{(h)}, & a_{12}^{(h)}, & \ldots & a_{1n}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)}, & a_{22}^{(h)}, & \ldots & a_{2n}^{(h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(h)}, & a_{n2}^{(h)}, & \ldots & a_{nn}^{(h)} \end{Bmatrix},$$

nous devons avoir

$$(15) \quad (AA_0)(AA)^m + (AA_1)(AA)^{m-1} + \ldots + (AA_{m-1})(AA) + AA_m = 0.$$

Or, en réduisant les substitutions $AA_0, AA_1, \ldots, AA_m, AA$ à *la forme normale* (¹), on peut écrire

$$AA = T^{-1}ST,$$
$$AA_h = T^{-1}S_hT$$

avec

$$S = \begin{Bmatrix} R_1, & o, & \ldots & o \\ o, & R_2, & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o, & o, & \ldots & R_p \end{Bmatrix}, \qquad S_h = \begin{Bmatrix} R_{h,1}, & o, & \ldots & o \\ o, & R_{h,2}, & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o, & o, & \ldots & R_{h,p} \end{Bmatrix}$$

et

$$R_g = \begin{Bmatrix} \alpha_g^{(1)}, & o, & o, & \ldots & o \\ \alpha_g^{(2)}, & \alpha_g^{(1)}, & o, & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ \alpha_g^{(\chi_g)}, & \alpha_g^{(\chi_g-1)}, & . & \ldots & \alpha_g^{(1)} \end{Bmatrix},$$

$$R_{h,g} = \begin{Bmatrix} \alpha_{h,g}^{(1)}, & o, & o, & \ldots & o \\ \alpha_{h,g}^{(2)}, & \alpha_{h,g}^{(1)} & o, & \ldots & o \\ \alpha_{h,g}^{(3)}, & \alpha_{h,g}^{(2)}, & \alpha_{h,g}^{(1)}, & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \alpha_{h,g}^{(\chi_g)}, & \alpha_{h,g}^{(\chi_g-1)}, & \ldots & \ldots & \alpha_{h,g}^{(1)} \end{Bmatrix},$$

$$\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_p = n,$$

T étant une substitution à déterminant différent de zéro. On en conclut que

$$R_{0,g}R_g^m + R_{1,g}R_g^{m-1} + \ldots + R_{m-1,g}R_g + R_{m,g} = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots, p).$$

Il faudra donc prendre pour $\alpha_g^{(1)}$ l'une quelconque des racines de l'équation algébrique de degré m

$$\alpha_{0,g}^{(1)}x^m + \alpha_{1,g}^{(1)}x^{m-1} + \alpha_{2,g}^{(1)}x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1,g}^{(1)}x + \alpha_{m,g}^{(1)} = 0,$$

on obtiendra ensuite les valeurs de

$$\alpha_g^{(2)}, \quad \alpha_g^{(3)}, \quad \ldots, \quad \alpha_g^{(\chi_g)}$$

par la résolution d'équations linéaires.

(¹) VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, 1re Partie (*Memorie della Società Italiana delle Scienze*, 3e série, vol. VI).

On forme la substitution S en remplaçant chacun des symboles $R_1, R_2, \ldots, R_p$ par le tableau qu'il représente, de manière que tous ces tableaux aient même diagonale principale. On complète ensuite la substitution en prenant tous ses autres éléments nuls. On formera de même S_h.

Nous saurons donc, en résolvant une équation de degré m et des équations linéaires, déterminer toutes les substitutions AA (et par conséquent A) qui satisfont à l'équation (15). A chacune des substitutions A, ainsi déterminées, correspondra une solution F de l'équation intégrale considérée.

5. Mais la méthode du n° 3 pourrait sembler restreinte aux fonctions de la forme particulière (I). Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Soit $\Psi(x, y)$ une fonction quelconque permutable de deuxième espèce avec (II). Posons

$$e_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, y)\,\varphi_r(x) f_s(y)\,dx\,dy,$$

et appelons E la substitution formée par les nombres e_{rs}. En vertu de la permutabilité, nous aurons

$$\int_0^1 \Psi(x, \xi)\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi, y)\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi,$$

c'est pourquoi

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(x, \xi)\,\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(\xi, y)\,\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi,$$

d'où enfin

(16) $$\mathrm{EBA} = \mathrm{ABE}.$$

Si nous prenons alors $\Psi(x, y)$ sous la forme

$$\Psi(x, y) = \Sigma_h\Sigma_k m_{hk} f_h(x)\,\varphi_k(y) + \Theta(x, y),$$

les constantes m_{hk} étant choisies de façon que

$$\int_0^1 \int_0^1 \Theta(x, y)\,\varphi_r(x) f_s(y)\,dx\,dy = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

en posant

$$\mathrm{M} = \begin{Bmatrix} m_{11}, & m_{12}, & \ldots & m_{1n} \\ m_{21}, & m_{22}, & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1}, & m_{n2}, & \ldots & m_{nn} \end{Bmatrix},$$

il vient

$$E = AMA.$$

L'équation (16) donne alors

$$(AM)(AB) = (AB)(AM),$$

la fonction

$$\Sigma_h \Sigma_k m_{hk} f_h(x) \varphi_k(y)$$

sera permutable avec (II) et par conséquent aussi la fonction $\Theta(x, y)$. On a donc

$$\int_0^1 \Theta(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) \, d\xi = \int_0^1 \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(\xi) \Theta(\xi, y) \, d\xi.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $f(y)$ et en intégrant entre o et 1, on obtient

$$\Sigma_i \Sigma_s b_{is} \lambda_{sh} \int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) \, d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

d'où, en supposant que le déterminant de la substitution BA soit différent de zéro,

$$(17) \qquad \int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) \, d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On a de même

$$(18) \qquad \int_0^1 \Theta(\xi, y) \varphi_i(\xi) \, d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or M. Lauricella a déterminé [1] la fonction la plus générale qui satisfait aux égalités (17) et (18); elle a la forme

$$(19) \quad \begin{aligned} \Theta(x, y) = \Omega(x, y) &- \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \mu_{is} \varphi_s(y) \int_0^1 \Omega(x, \xi) f_i(\xi) \, d\xi \\ &- \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \mu_{is} f_i(x) \int_0^1 \Omega(\xi, y) \varphi_s(\xi) \, d\xi \\ &+ \sum_h \sum_k f_h(x) \varphi_k(y) \sum_i \sum_s \mu_{ik} \mu_{hs} \int_0^1 \int_0^1 \Omega(\xi, \eta) \varphi_s(\xi) f_i(\eta) \, d\xi \, d\eta. \end{aligned}$$

[1] *Sopra alcune equazioni integrali* (*Rend. Lincei*, 1er sem. 1908).

où

$$\begin{Vmatrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1}, & \mu_{n2}, & \cdots & \mu_{nn} \end{Vmatrix} = \Lambda^{-1},$$

et où $\Omega(x, y)$ est une fonction arbitraire.

Nous obtenons ainsi, *en prenant la fonction la plus générale de la forme* (I), *permutable avec* (II), *et en lui ajoutant l'expression* (19), *la fonction la plus générale permutable avec* (II).

On peut voir de même qu'en ajoutant à la solution trouvée précédemment de l'équation intégrale (III) l'expression (19), on obtient *la solution générale* de cette équation.

6. Un cas particulier intéressant des considérations précédentes est celui où

$$f_i(x) = \varphi_i(x),$$

et ces fonctions sont normales; on a alors

$$\Lambda = 1.$$

Si nous supposons en outre que les fonctions

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n$$

font partie d'un système de fonctions normales

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_N \qquad (N > n),$$

nous obtiendrons des fonctions Θ qui vérifient (17) et (18) en posant

$$\Theta(x, y) = \sum_{n+1}^{N}{}_i \sum_{n+1}^{N}{}_s q_{is} f_i(x) f_s(y),$$

les q_{is} étant des constantes arbitraires. Ce résultat s'étend aisément aux cas où $N = \infty$.

7. On voit combien les méthodes qui servent dans l'étude des fonctions permutables de deuxième espèce diffèrent de celles applicables aux fonctions permutables de première espèce.

Les considérations précédentes, en mettant en lumière les relations entre *la permutabilité de deuxième espèce* et *la théorie des substitutions*, nous font toucher, je crois, sa véritable nature. En tout cas, elles sont utiles dans les applications, comme nous l'avons vu à propos de l'équation intégrale (III) (¹).

(¹) Le problème de la détermination des fonctions permutables de deuxième espèce avec une fonction donnée a été étudié d'abord par M Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di 2ª specie* (*Lincei Rend.*, 1er sem. 1911). Consulter aussi les intéressants travaux de M. Soula, *Sur la permutabilité de 2e espèce* (*Lincei Rend.* 2e sem. 1912 et 1er sem. 1913) et de Lauricella, *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie* (*Lincei Rend.*, 1er sem. 1913) qui a donné la solution la plus générale du problème.

CHAPITRE XIII.

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES A LIMITES FIXES.

1-3. La permutabilité de deuxième espèce considérée comme cas limite d'une permutabilité de quantités à deux indices. — 4. Les séries de fonctions permutables. — 5. Application de la théorie à la résolution des équations intégrales ou intégro-différentielles : le problème corrélatif de la résolution d'une équation algébrique ou différentielle. — 6. Le problème corrélatif relatif à la permutabilité de première espèce (*cf.* Chap. IX et X). — 7-8. Applications. Transformation des théorèmes d'addition. — 9-13. Application à l'étude de l'équation intégro-différentielle à limites constantes analogue à celle du Chapitre V.

---

1. Laissant de côté les divers problèmes qui se posent sur la permutabilité de deuxième espèce, nous allons aborder une étude bien plus essentielle.

On a vu comment la théorie de la permutabilité de première espèce conduit à la solution de classes d'équations intégrales ou intégro-différentielles *à limites variables ;* nous allons exposer comment la théorie de la permutabilité de deuxième espèce conduit à des résultats analogues relatifs à des équations intégrales et intégro-différentielles *à limites fixes.*

Pour bien comprendre la théorie, il faut revenir au point de départ de tout l'ensemble de recherches que nous avons développé, c'est-à-dire au *passage du fini à l'infini.* C'est ce que nous allons faire tout d'abord [1].

2. Soient des quantités dépendant de deux indices

$$(1) \qquad m_{r,s}, \quad n_{r,s}, \quad p_{r,s}, \quad q_{r,s}, \quad \ldots \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, g),$$

que nous supposerons *permutables de deuxième espèce*, cette

---

[1] *Cf.* Volterra, *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Lincei Rend.*, 2ᵉ semestre 1911, p. 79).

propriété s'exprimant par les égalités

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_1^g {}_l\, m_{r,l}\, n_{l,s} = \sum_1^g {}_l\, n_{r,l}\, m_{l,s}, \\ \sum_1^g {}_l\, n_{r,l}\, p_{l,s} = \sum_1^g {}_l\, p_{r,l}\, n_{l,s}, \\ \sum_1^g {}_l\, p_{r,l}\, m_{l,s} = \sum_1^g {}_l\, m_{r,l}\, p_{l,s}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui, en posant

$$\sum_1^g {}_l\, m_{r,l}\, n_{l,s} = (m, n)_{r,s},$$

peuvent s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} (m, n)_{rs} = (n, m)_{rs}, \\ (n, p)_{rs} = (p, n)_{rs}, \\ (p, m)_{rs} = (m, p)_{rs}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous poserons aussi

$$(m, n, p)_{rs} = ((m, n) p)_{rs},$$

et ainsi de suite. Si les m, n, p, ... (etc. en nombre α) sont identiques, nous écrirons

$$(m, n, p, \dots)_{rs} = (m^\alpha)_{rs}.$$

L'expression

$$(m^\alpha, n^\beta, p^\gamma, \dots)_{rs},$$

où α, β, γ sont des entiers, aura enfin une définition analogue.

Ceci posé, soient

$$(4)\quad \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \dots a_{\alpha,\beta,\gamma,\dots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \dots,$$

$$(4')\quad \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \dots b_{\alpha,\beta,\gamma,\dots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \dots,$$

deux fonctions entières des variables complexes z, u, v, ... Admettons que $a_{0,0,\dots} = b_{0,0,\dots} = 0$.

Posons

$$(4'')\quad \frac{\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \dots a_{\alpha,\beta,\gamma,\dots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \dots}{1 + \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \dots b_{\alpha,\beta,\gamma,\dots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \dots} = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \dots c_{\alpha,\beta,\gamma,\dots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \dots.$$

Il est évident que, tandis que les développements (4) et (4′) sont valables quels que soient z, u, v, ..., le développement (4″) ne sera valable, en général, que si les modules de z, u, v, ... sont inférieurs à certaines limites.

Construisons les fonctions

(5) $\Phi_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}(m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots)_{rs} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$

(5′) $\Psi_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots b_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}(m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots)_{rs} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$

(5″) $\mathrm{F}_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}(m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots)_{rs} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots.$

Elles satisfont aux théorèmes suivants :

1° Les fonctions $\Phi_{rs}(z, u, v, \ldots)$, $\Psi_{rs}(z, u, v, \ldots)$ sont des fonctions entières des variables z, u, v, ...;

2° La fonction $\mathrm{F}_{rs}(z, u, v, \ldots)$ est le rapport de deux fonctions entières des variables z, u, v, ...;

3° Φ_{rs}, Ψ_{rs}, F_{rs} sont des quantités permutables avec m_{rs}, n_{rs}, p_{rs}, ...

Pour démontrer la première proposition, remarquons que R_1, R_2, R_3, ... étant des nombres quelconques, il existe un nombre M tel que

$$|a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_1^\alpha \mathrm{R}_2^\beta \mathrm{R}_3^\gamma \ldots}.$$

Soient m, n, p, ... des nombres respectivement plus grands que les limites supérieures des valeurs absolues de

$$m_{rs},\quad n_{rs},\quad p_{rs},\quad \ldots,$$

on aura

$$|(m, n)_{r,s}| < \sum_1^g mn = gmn < g^2 mn,$$

$$|(m, n, p)_{rs}| < \sum_1^g g^2 mnp = g^3 mnp,$$

et, en général,

$$|(m^\alpha, n^\beta, p^\gamma, \ldots)_{rs}| < g^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots.$$

Dans ces conditions

$$|a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}(m^\alpha, n^\beta, p^\gamma, \ldots)_{rs}| < \frac{\mathrm{M}\, g^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots}{\mathrm{R}_1^\alpha \mathrm{R}_2^\beta \mathrm{R}_3^\gamma \ldots}$$

$$= \frac{\mathrm{M}}{\left(\frac{\mathrm{R}_1}{gm}\right)^\alpha \left(\frac{\mathrm{R}_2}{gn}\right)^\beta \left(\frac{\mathrm{R}_3}{gp}\right)^\gamma \ldots}.$$

Par suite, la série (5) sera convergente si

$$|z| < \frac{R_1}{gm}, \qquad |u| < \frac{R_2}{gn}, \qquad |v| < \frac{R_3}{gp}, \qquad \cdots.$$

Mais R_1, R_2, R_3 sont des nombres aussi grands qu'on veut, la fonction (5) sera donc bien une fonction entière de z, u, v, ...

On démontre, de même, que la fonction (5′) est une fonction entière.

Pour établir le second théorème, envisageons le système d'équations algébriques linéaires

$$(6) \qquad X_{r,s} + \sum_{1}^{g}{}_{l}\, \Psi_{r,l} X_{l,s} = \Phi_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, g).$$

Ces équations sont satisfaites si l'on y remplace $X_{r,s}$ par $F_{r,s}$, car les opérations de composition définies au n° 2 obéissent aux mêmes règles que celles de multiplication.

Mais, d'autre part, en résolvant ce système algébrique (6), nous obtenons les inconnues $X_{r,s}$ sous forme de rapports de polynomes rationnels et entiers des quantités Φ_{rs} et $\Psi_{r,s}$. Ces inconnues sont donc des rapports de fonctions entières des variables z, u, v, ... Le dénominateur commun de ces rapports n'est pas identiquement nul : il est, en effet, aisé de constater qu'il est égal à 1 pour $z = u = v = \ldots = 0$. La deuxième proposition est ainsi démontrée.

Pour démontrer la troisième, il suffit de remarquer que les fonctions $\Phi_{r,s}$, $\Psi_{r,s}$, $F_{r,s}$ s'expriment par des séries dont chaque terme est permutable avec $m_{r,s}$, $n_{r,s}$, $p_{r,s}$, ...

Il est presque inutile de faire remarquer que $F_{r,s}$ n'est pas défini par des rapports simples tels que le rapport (4″), mais par des opérations bien plus compliquées, telles que la résolution des équations (6).

3. Appliquons maintenant *le passage du fini à l'infini* qui a joué un si grand rôle dans tout le cours de ces Leçons, c'est-à-dire le procédé fondamental du calcul intégral qui nous a permis d'étendre le concept de fonction, de système d'équations, etc.

Il faudra faire croître indéfiniment le nombre g pendant que les quantités m_{rs}, n_{rs}, p_{rs}, ... décroissent indéfiniment.

Considérons, pour cela, des fonctions de deux variables $S_1(x,y)$, $S_2(x,y)$, ... finies et continues dans le carré qui a pour côté les vecteurs unités portés sur les deux axes.

Divisons ces côtés en intervalles $h_1, h_2, \ldots h_g$ et menons par les points de division les parallèles aux axes. Le carré est ainsi décomposé en un certain nombre de rectangles. Soient enfin

$$S_1(x_r, x_s), \quad S_2(x_r, x_s), \quad \ldots$$

les valeurs des fonctions S_1, S_2, ... en un point intérieur au rectangle de côtés h_r, h_s et posons

$$m_{r,s} = S_1(x_r, x_s)h_r, \qquad n_{r,s} = S_2(x_r, x_s)h_r, \qquad \ldots.$$

La condition de permutabilité des m_{rs} et n_{rs} s'écrit

$$\sum_1^g {}_l\, S_1(x_r, x_l)\, S_2(x_l, x_s)\, h_r h_l = \sum_1^g {}_l\, S_2(x_r, x_l)\, S_1(x_l, x_s)\, h_r h_l.$$

ou en divisant par h_r

$$\sum_1^g {}_l\, S_1(x_r, x_l)\, S_2(x_l, x_s)\, h_l = \sum_1^g {}_l\, S_2(x_r, x_l)\, S_1(x_l, x_s)\, h_l.$$

A la limite, en faisant diminuer indéfiniment h_1, h_2, ..., h_g, on obtient

$$\int_0^1 S_1(x, \xi)\, S_2(\xi, y)\, d\xi = \int_0^1 S_2(x, \xi)\, S_1(\xi, y)\, d\xi,$$

c'est-à-dire la condition de permutabilité de deuxième espèce des deux fonctions S_1 et S_2.

Comme dans tous les cas précédents (par exemple celui de la dérivée d'une fonction de ligne), les variables x, y jouent le même rôle que les indices r, s.

4. Les théorèmes du numéro précédent donnent alors à la limite les théorèmes suivants :

1° Les fonctions

$$\Phi(z, u, v, \ldots, | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \overset{**}{S}{}_1^\alpha \overset{**}{S}{}_2^\beta \overset{**}{S}{}_3^\gamma \ldots z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$$

$$\Psi(z, u, v, \ldots, | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots b_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \overset{**}{S}{}_1^\alpha \overset{**}{S}{}_2^\beta \overset{**}{S}{}_3^\gamma \ldots z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$$

sont des fonctions entières de z, u, v, ...

2° La fonction

$$F(z, u, v, \ldots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \overset{**}{S}{}_1^\alpha \overset{**}{S}{}_2^\beta \overset{**}{S}{}_3^\gamma \ldots z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots$$

est le rapport de deux fonctions entières de z, u, v, ...

3° Les fonctions $\Phi(z, u, v, \ldots | x, y)$, $\Psi(z, u, v, \ldots | x, y)$, $F(z, u, v, \ldots | x, y)$ sont permutables de deuxième espèce avec $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, ...

Enfin, pour obtenir $F(z, u, v, \ldots | x, y)$, il suffira de résoudre l'équation intégrale qu'on déduit à la limite du système d'équations (6)

$$F(z, u, v, \ldots | x, y) + \int_0^1 \Psi(z, u, v, \ldots | x, \xi) F(z, u, v, \ldots | \xi, y) d\xi = \Phi(z, u, v, \ldots | x, y).$$

5. Soit un système quelconque d'équations algébriques ou différentielles d'un ordre quelconque

$$(7) \quad \begin{cases} g_s\Big(z, z_1, z_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots, v, v_1, v_2, \ldots, \\ \qquad w, w_1, w_2, \ldots, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \dfrac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\ldots} \mathcal{F}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \ldots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1} \ldots}, \ldots\Big) = 0 \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

où nous supposons que z, z_1, z_2, ..., u, u_1, u_2, ... soient des variables indépendantes de dérivation ; v, v_1, v_2, ..., w, w_1, w_2, ... des paramètres ; $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... les fonctions inconnues. Pour simplifier admettons que les premiers membres soient des polynomes rationnels et entiers.

Soient enfin $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... des solutions du système (7) nulles au point $z = u = v = w = \ldots = 0$ régulières dans le domaine de ce point et s'exprimant comme rapports de fonctions entières des variables z, u, ... et des paramètres v, w, ... lorsque les autres variables z_1, z_2, ..., u_1, u_2, ... et les autres paramètres v_1, v_2, ..., w_1, w_2, ... varient dans des champs déterminés. Ces solutions pourront s'écrire

$$\mathcal{F}_s = \frac{\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \ldots a^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \ldots}{1 + \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \ldots b^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \ldots}$$
$$= \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \ldots .$$

Formons les expressions

$$f_s = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} (z\xi_1)^\alpha (u\xi_2)^\beta (v\xi_3)^\gamma (w\xi_4)^\delta \ldots,$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont des paramètres constants. Elles vérifient les équations

$$(8) \qquad \mathcal{G}_s\Big(z, z_1, \ldots, u, u_1, \ldots, v, v_1, \ldots, w, w_1, \ldots, f_1, f_2, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots\Big) = 0$$

déduites des équations (7) en remplaçant z, u, v, w, ... par $z\xi_1$, $u\xi_2$, $v\xi_3$, $w\xi_4$, ...

Si nous considérons enfin les fonctions

$$F_s = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \ldots \overset{**}{S}{}_1^\alpha \overset{**}{S}{}_2^\beta \overset{**}{S}{}_3^\gamma \overset{**}{S}{}_4^\delta \ldots,$$

où S_1, S_2, S_3, S_4, ... sont des fonctions permutables de deuxième espèce, elles seront *les rapports de fonctions entières en* z, u, v, w, ... *et vérifieront les équations intégro-différentielles*

$$(9) \qquad \mathcal{G}_s\Big(z, z_1, \ldots, u, u_1, \ldots, v, v_1, \ldots, w, w_1, \ldots, \overset{**}{F}_1, \overset{**}{F}_2, \ldots, \frac{\partial \overset{**}{F}_1}{\partial z}, \ldots, \overset{**}{S}_1, \overset{**}{S}_2, \ldots\Big) = 0 \text{ (1)}.$$

Nous sommes ainsi conduits au résultat général suivant :

A tout problème algébrique ou différentiel dont la solution amène à des fonctions qu'on peut exprimer par des rapports de fonctions entières correspond un problème intégral ou inté-

---

(1) Si

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

est une série de puissances des variables z_1, z_2, ..., z_n convergente dans un certain cercle, nous désignons en général par

$$\varphi(\overset{**}{F}_1, \overset{**}{F}_2, \ldots, \overset{**}{F}_n)$$

la série déduite de la précédente en y remplaçant z_1, z_2, ..., z_n par des fonctions permutables de deuxième espèce F_1, F_2, ..., F_n et en y regardant les produits et les puissances de F_1, F_2, ..., F_n comme des compositions de deuxième espèce. Cette nouvelle série est convergente dans un certain domaine fonctionnel.

Nous avons déjà employé une notation analogue pour les compositions de première espèce.

gro-différentiel dont la solution peut aussi s'obtenir comme rapport de fonctions entières des mêmes variables. On peut appeler ce problème le problème corrélatif du premier. De la solution du premier problème on passe aisément à celle du second.

On voit facilement quelle est la situation du problème de la résolution des équations intégrales linéaires dans la classe des problèmes envisagés par la proposition précédente : il est le problème corrélatif du problème de la résolution d'une équation algébrique du premier degré.

Soit, en effet, l'équation

$$(\nu + \nu_1)\mathfrak{F} = w,$$

on en tire

$$\mathfrak{F} = \frac{w}{\nu + \nu_1},$$

fonction évidemment *méromorphe* des coefficients. Le problème corrélatif est la résolution de l'équation intégrale linéaire

$$\nu_1 \mathrm{F}(x, y) + \nu \int_0^1 \mathrm{F}(x, \xi)\, \mathrm{S}_1(\xi, y)\, d\xi = w\, \mathrm{S}_2(x, y) \text{ [1]}.$$

Si l'on songe au nombre des problèmes d'analyse qui admettent pour solutions des fonctions méromorphes, on comprendra à quel point la portée de la proposition précédente dépasse le problème des équations intégrales linéaires.

6. Si l'on se rappelle maintenant les résultats généraux du neuvième et du dixième Chapitre, on voit qu'en plus du problème correspondant à la proposition précédente il existe un autre problème corrélatif intégral ou intégro-différentiel à limites variables *dont la solution est toujours donnée par des fonctions entières*. Pour cet autre cas il n'est même pas nécessaire que le problème algébrique ou différentiel de départ ait une solution méromorphe.

---

[1] La résolution de l'équation de Fredholm se ramène facilement à celle de l'équation précédente où l'on suppose $\nu_1 = 1$, $w = -1$, $\nu = \lambda$ et

$$\mathrm{S}_1(x, y) = \mathrm{S}_2(x, y).$$

Comparer *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. III, n° 2.

Il est intéressant de montrer que cet autre problème corrélatif est obtenu lui aussi par le passage du fini à l'infini développé au n° 6.

Considérons, en effet, des quantités

$$m_{r,s}, \quad n_{r,s}, \quad p_{r,s}, \quad \ldots$$

avec $r < s$, en les supposant nulles si $r \geqq s$, et définissons une *permutabilité de première espèce* de ces quantités par l'égalité

$$\sum_{r+1}^{s-1} m_{r,l}\, n_{l,s} = \sum_{r+1}^{s-1} n_{r,l}\, m_{l,s}$$

ou en posant

$$\sum_{r+1}^{s-1} m_{r,l}\, n_{l,s} = [m, n]_{r,s},$$

$$[m, n]_{r,s} = [n, m]_{r,s}.$$

Les quantités m_{rs}, n_{rs}, p_{rs}, ... étant ainsi permutables de première espèce, l'expression

$$[m^\alpha, n^\beta, p^\gamma, \ldots]_{r,s}$$

a un sens évident.

Si nous construisons alors les fonctions

$$\varphi_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots a_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots]_{rs}, z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$$
$$\psi_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots b_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots]_{r,s} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$$
$$f_{r,s}(z, u, v, \ldots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \ldots c_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} [m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots]_{r,s} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots,$$

ce sont des polynomes et par conséquent des fonctions entières.

La proposition résulte pour les deux premières fonctions de ce que, si

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots > s - r,$$

on a

$$[m^\alpha n^\beta p^\gamma \ldots]_{r,s} = 0.$$

Pour la troisième, elle peut se démontrer en remarquant que les fonctions f_{rs} satisfont aux équations

$$x_{r,s} + \sum_{r+1}^{s-1} \psi_{r,l}\, x_{l,s} = \varphi_{r,s}.$$

Or les solutions de ces équations s'expriment par des polynomes en φ_{rs} et ψ_{rs} puisque les dénominateurs sont égaux à l'unité.

Un passage à la limite tout à fait analogue au passage précédent nous amène de ce cas au cas des fonctions permutables de première espèce, c'est-à-dire telles que

$$\int_x^y S_1(x,\xi)\,S_2(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y S_2(x,\xi)\,S_1(\xi,y)\,d\xi.$$

7. Ainsi nous pouvons dire en général :

Tout problème de l'analyse qui a pour solution des fonctions méromorphes conduit à deux problèmes qui lui sont corrélatifs : un problème intégral ou intégro-différentiel à limites variables ayant pour solution des fonctions entières, un problème à limites fixes ayant pour solutions des fonctions méromorphes.

Il faut remarquer que le problème à limites fixes contient comme cas particulier (si l'on fait $S_1 = S_2 = \ldots = 1$) le problème de départ. Ce n'est pas le cas pour le premier problème corrélatif.

On peut ajouter que : *Si les solutions du problème initial admettent des théorèmes d'addition, ces théorèmes se conservent en devenant des théorèmes d'addition à limites variables ou à limites fixes.*

Si l'on part, par exemple, de l'équation différentielle [1]

$$\frac{d\varphi}{dz} = 1 + \varphi$$

vérifiée par la série entière

$$\varphi = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

admettant le théorème d'addition

$$\varphi(z+u) = \varphi(z) + \varphi(u) + \varphi(z)\,\varphi(u),$$

on est conduit aux équations intégro-différentielles (premier problème corrélatif)

$$\frac{d\,V(z \mid x,y)}{dz} = \mathfrak{F}(x,y) + \int_x^y \mathfrak{F}(x,\xi)\,V(z \mid \xi,y)\,d\xi$$

---

[1] *Cf.* Chapitre X, n° 5.

et (deuxième problème corrélatif)

$$\frac{d\mathrm{W}(z\,|\,x,y)}{dz} = \mathfrak{F}(x,y) + \int_0^1 \mathfrak{F}(x,\xi)\,\mathrm{W}(z\,|\,\xi,y)\,d\xi$$

qui admettent les solutions

$$\mathrm{V}(z\,|\,x,y) = z\mathfrak{F} + \frac{z^2\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^2}{2!} + \frac{z^3\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^3}{3!} + \ldots,$$

$$\mathrm{W}(z\,|\,z,x) = z\mathfrak{F} + \frac{z^2\overset{**}{\mathfrak{F}}{}^2}{2!} + \frac{z^3\overset{**}{\mathfrak{F}}{}^3}{3!} + \ldots,$$

avec les théorèmes d'addition

$$\mathrm{V}(z+u\,|\,x,y) = \mathrm{V}(z\,|\,x,y) + \mathrm{V}(u\,|\,x,y) + \int_x^y \mathrm{V}(z\,|\,x,\xi)\,\mathrm{V}(u\,|\,\xi,y)\,d\xi,$$

$$\mathrm{W}(z+u\,|\,x,y) = \mathrm{W}(z\,|\,x,y) + \mathrm{W}(u\,|\,x,y) + \int_0^1 \mathrm{W}(z\,|\,x,\xi)\,\mathrm{W}(u\,|\,\xi,y)\,d\xi.$$

De même, les équations différentielles des fonctions elliptiques conduisent aux équations intégro-différentielles

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1(z\,|\,x,y)}{dz} &= \int_x^y \varphi_2(z\,|\,x,\xi)\,\varphi_3(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,\\
\frac{d\varphi_2(z\,|\,x,y)}{dz} &= -\int_x^y \varphi_3(z\,|\,x,\xi)\,\varphi_1(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,\\
\frac{d\varphi_3(z\,|\,x,y)}{dz} &= -k^2\int_x^y \varphi_1(z\,|\,x,\xi)\,\varphi_2(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,
\end{aligned}\right.$$

ayant des solutions entières en z (*cf.* Chap. X, n° 4) et aux équations intégro-différentielles

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\psi_1(z\,|\,x,y)}{dz} &= \int_0^1 \psi_2(z\,|\,x,\xi)\,\psi_3(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,\\
\frac{d\psi_2(z\,|\,x,y)}{dz} &= -\int_0^1 \psi_3(z\,|\,x,\xi)\,\psi_1(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,\\
\frac{d\psi_3(z\,|\,x,y)}{dz} &= -k^2\int_0^1 \psi_1(z\,|\,x,\xi)\,\psi_2(z\,|\,\xi,y)\,d\xi,
\end{aligned}\right.$$

ayant des solutions méromorphes en z. Les unes et les autres admettent des théorèmes d'addition qu'on déduit immédiatement des théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.

8. Dans tous les cas précédents où partant d'une fonction méromorphe *d'une seule variable*

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

on en déduit la fonction, également méromorphe

$$(10) \qquad f(z \mid x, y) = c_1 \mathrm{S} z + c_2 \overset{**}{\mathrm{S}}{}^2 z^2 + c_3 \overset{**}{\mathrm{S}}{}^3 z^3 + \ldots,$$

il est bien aisé d'obtenir les pôles de cette nouvelle fonction.

D'après un théorème de M. Hadamard, *si nous nommons*

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

les pôles de $f(z)$, *et*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

les pôles de

$$(11) \qquad \mathrm{S} + \overset{**}{\mathrm{S}}{}^2 z + \overset{**}{\mathrm{S}}{}^3 z^2 + \ldots,$$

les pôles de $f(z \mid x, y)$ *ne peuvent être que des points* $a_r b_s$.

D'autre part, si nous considérons l'équation intégrale

$$(12) \qquad \mathrm{S}(x, y) = \mathrm{F}(z \mid x, y) - z \int_0^1 \mathrm{F}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{S}(\xi, y)\, d\xi,$$

on en tire

$$\mathrm{F}(z \mid x, y) = \mathrm{S} + \overset{**}{\mathrm{S}}{}^2 z + \overset{**}{\mathrm{S}}{}^3 z^2 + \ldots;$$

les pôles de (11) ne peuvent être que des zéros du déterminant de l'équation (12).

On peut d'ailleurs *construire effectivement un développement de Mittag-Leffler de la fonction* (10).

Prenons, en effet, $f(z)$ sous la forme [1]

$$f(z) = \Sigma_i m_i \left(\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \ldots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right) + \mathrm{P}_0(z),$$

$\mathrm{P}_0(z)$ étant une fonction holomorphe dans tout le plan, et prenons la solution de l'équation (12) sous la forme

$$\frac{\mathrm{H}(z \mid x, y)}{\mathrm{D}(z)},$$

$\mathrm{D}(z)$ étant le déterminant de cette équation.

---

[1] On a supposé, pour simplifier, que les pôles de $f(z)$ soient simples.

Choisissons enfin les nombres h_i de façon que les deux séries

$$\Sigma_i m_i \left(\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \ldots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right)$$

et

$$\Sigma_i m_i \left(\frac{\frac{z}{b_i} \mathrm{H}\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{\mathrm{D}\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} \mathrm{S} - \frac{z^2}{b_i^2} \overset{**}{\mathrm{S}}{}^2 - \ldots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \overset{**}{\mathrm{S}}{}^{h_i} \right)$$

soient simultanément convergentes dans le domaine de tout point z qui n'est pas de forme $a_r b_s$.

La fonction

$$\Sigma_i m_i \left(\frac{z}{b_i} \frac{\mathrm{H}\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{\mathrm{D}\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} \mathrm{S} - \frac{z^2}{b_i^2} \overset{**}{\mathrm{S}}{}^2 - \ldots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \overset{**}{\mathrm{S}}{}^{h_i} \right) + \mathrm{P}_0(\overset{**}{\mathrm{S}} z)$$

représente précisément $f(z \mid x, y)$ (¹).

9. Voici une autre application des considérations précédentes qui, tandis que la généralisation des fonctions elliptiques envisagée au n° 7 introduisait des fonctions méromorphes d'une variable, conduit à des fonctions méromorphes d'un paramètre.

Nous avons exposé, dans le Chapitre V, la théorie de l'équation à limites variables

$$(13) \quad \Delta^2 u(x, y, z \mid t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x, y, z \mid \tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0,$$

et indiqué (Chap. X) les simplifications qu'on rencontre lorsque f, φ, ψ sont permutables de première espèce. Nous allons étudier

(¹) *Cf.* VOLTERRA, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Rend. dei Lincei*, 1910, 1ᵉʳ sem., p. 169, § 8). Consulter aussi LEBESGUE, *Sur un théorème de M. Volterra* (*Bull. Soc. math. de France*, 1912).

au même point de vue l'équation à limites constantes [1]

$$\text{(A)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0.$$

On vérifie aisément que l'équation adjointe est

$$\text{(A}'\text{)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0,$$

et que le principe de réciprocité s'écrit [2]

$$\text{(B)}\qquad 0 = \mathrm{K}_\sigma |[u, v]| = \int_0^1 dt \left\{ \int_\sigma \left[v(t)\frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t)\frac{\partial v(t)}{\partial n} \right] d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_{1}^{p}{}_i \left[v(t)\frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i} - u(\tau)\frac{\partial v(t)}{\partial x_i} \right] f_i(t, \tau) \cos n x_i \, d\sigma \right\}.$$

Il reste à trouver la solution fondamentale de l'équation adjointe. Si l'on remplace $f_i(t, \tau)$ par $z f_i(t, \tau)$, (A) et (A′) deviennent

$$\text{(A}_1\text{)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$$\text{(A}'_1\text{)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_{1}^{p}{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0,$$

---

(1) *Cf.* Volterra, *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* (*Lincei Rend.*, 1er sem. 1911).

(2) σ est la frontière d'un domaine S à p dimensions où les fonctions u, v sont régulières, n est la normale extérieure à σ.

et, par des calculs analogues à ceux par lesquels on vérifie que l'expression (5) du Chapitre V est la solution fondamentale de l'équation (1') du même Chapitre ([1]), on peut démontrer que la solution fondamentale de l'équation (A'_1) (dans l'hypothèse $p > 2$) a la forme

$$(14)\quad \begin{aligned} V(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t) &= F(t) r^{2-p} + \int_0^1 \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m F(\xi) z^m \, d\xi}{2.4\ldots 2m(4-p)(6-p)\ldots[2(m+1)-p]} \\ &\quad \times \sum_{h_1+\ldots+h_p=m} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\ldots \partial x_p^{2h_p}} F_{h_1, h_2, \ldots, h_p}(\xi, t), \end{aligned}$$

où $F(t)$ est une fonction arbitraire, et

$$r = \sqrt{\sum_1^p {}_i (x_i - a_i)^2},$$

$$f_1(t, \tau) = F_{1,0,\ldots,0}(t, \tau), \qquad f_2(t, \tau) = F_{0,1,\ldots,0}(t, \tau), \qquad \ldots,$$
$$f_p(t, \tau) = F_{0,0,\ldots,1}(t, \tau),$$

$$F_{h_1, h_2, \ldots, h_p}(t, \tau) = \int_0^1 \sum_{q_1+q_2+\ldots+q_p=\rho} F_{q_1, q_2, \ldots, q_p}(t, \xi) \times F_{h_1-q_1, h_2-q_2, \ldots, h_p-q_p}(\xi, \tau)\, d\xi.$$

La somme $\sum\limits_{q_1+q_2+\ldots+q_p=\rho}$ est étendue à toutes les valeurs entières de $q_1, q_2, \ldots, q_p$ dont la somme est constante et égale à ρ, en considérant comme nulle une fonction F dont quelques indices sont négatifs.

La série (14) sera convergente tant que $|z|$ sera inférieur à une limite fixe.

10. Ceci posé, supposons que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ soient des fonctions permutables de deuxième espèce. Nous aurons

$$F_{h_1, h_2, \ldots, h_p}(t, \tau) = N_{h_1, h_2, \ldots, h_p} \overset{**}{f_1^{h_1}} \overset{**}{f_2^{h_2}} \ldots \overset{**}{f_p^{h_p}}(t, \tau),$$

où $N_{h_1, h_2, \ldots, h_p}$ est un nombre facile à calculer en fonction de h_1,

([1]) *Cf.* VOLTERRA, *Acta mathematica*, t. XXXV, *loc. cit.*, art. 4.

$h_2, \ldots, h_p$, et la solution fondamentale (14) pourra s'écrire

$$(14')\quad V(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid t) = F(t) r^{2-p} + \int_0^1 \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m F(\xi) z^m \, d\xi}{2.4\ldots 2m(4-p)(6-p)\ldots[2(m+1)-p]} \times \sum_{h_1+h_2+\ldots+h_p=m} N_{h_1, h_2, \ldots, h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \ldots \partial x_p^{2h_p}} \overset{**}{f}{}_1^{h_1} \ldots \overset{**}{f}{}_p^{h_p}(\xi, t).$$

11. Considérons alors l'équation aux dérivées partielles

$$(15)\qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + z \sum_1^p {}_i m_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0.$$

Si $|z|$ est inférieur à une certaine limite, sa solution fondamentale se met sous la forme

$$W = C r^{2-p} + \frac{(-1)^m C z^m}{2.4\ldots 2m(4-p)(6-p)\ldots[2(m+1)-p]} \times \sum_{h_1+h_2+\ldots+h_p=m} N_{h_1, h_2, \ldots, h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \ldots \partial x_p^{2h_p}} m_1^{h_1} \ldots m_p^{h_p},$$

C étant une constante arbitraire.

Mais la même solution peut aussi s'écrire

$$W = \frac{C}{\left[\sum_1^p {}_i \dfrac{(x_i - a_i)^2}{1 + z m_i}\right]^{\frac{p-2}{2}}},$$

et dans le cas où l'on suppose $p = 2q$, q étant un entier supérieur à 1,

$$W = \frac{C}{\left[\sum_1^{2q} {}_i \dfrac{(x_i - a_i)^2}{1 + z m_i}\right]^{q-1}},$$

ou enfin

$$W = \frac{C}{r^{2q-2}} \frac{[(1 + z m_1)(1 + z m_2)\ldots(1 + z m_{2q})]^{q-1}}{\left\{1 + \sum_1^{2q} {}_i \dfrac{(x_i - a_i)^2}{r^2}[(1 + z m_1)\ldots(1 + z m_{i-1})(1 + z m_{i+1})\ldots(1 + z m_{2q}) - 1]\right\}^{q-1}}.$$

Ainsi dans le cas particulier (et dans ce cas seulement) où les

variables de dérivation sont *en nombre pair*, la solution fondamentale de l'équation (15) est une fonction méromorphe et même rationnelle de z.

12. D'après le résultat fondamental du n° 5, dans ce même cas ($p = 2q$) la solution fondamentale (14) de l'équation (A'_1) sera une fonction méromorphe de z qu'on obtient, il est facile de s'en assurer, par le procédé suivant :

Soit $f^{(1)}_{1,2,\ldots,2q}(t,\tau)$ la somme algébrique des fonctions $f_1(t,\tau)$, $f_2(t,\tau)$, ..., $f_{2q}(t,\tau)$. Soit de même $f^{(2)}_{1,2,\ldots,2q}(t,\tau)$ la somme algébrique des fonctions obtenues en composant deux à deux les mêmes fonctions, $f^{(3)}_{1,2,\ldots,2q}$ la somme algébrique des fonctions obtenues en les composant trois à trois et ainsi de suite.

Formons

$$z f^{(1)}_{1,2,\ldots,2q}(t,\tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\ldots,2q}(t,\tau) + \ldots + z^{2q} f^{(2q)}_{1,2,\ldots,2q}(t,\tau) = \chi(t,\tau),$$

puis

$$(q-1)\chi(t,\tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\overset{**}{\chi}{}^2(t,\tau)$$
$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}\overset{**}{\chi}{}^3(t,\tau) + \ldots + \overset{**}{\chi}{}^{q-1}(t,\tau) = \Lambda(t,\tau)$$

et

$$F(t) + \int_0^1 F(\xi)\Lambda(\xi,t)\,d\xi = \Phi(t).$$

Si nous calculons ensuite

$$z\, f^{(1)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t,\tau)$$
$$+ z^2 f^{(2)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t,\tau) + \ldots + z^{2q} f^{(2q)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t,\tau) = \Psi_i(t,\tau),$$

$$\sum_{1}^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}\Psi_i(t,\tau) = \Psi(t,\tau),$$

$$(q-1)\Psi(t,\tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\overset{**}{\Psi}{}^2(t,\tau)$$
$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}\overset{**}{\Psi}{}^3(t,\tau) + \ldots + \overset{**}{\Psi}{}^{q-1}(t,\tau) = \Theta(t,\tau),$$

la fonction fondamentale cherchée est la solution de l'équation intégrale

$$(16) \qquad V(t) + \int_0^1 V(\xi)\Theta(\xi,t)\,d\xi = \Phi(t).$$

La fonction $V(t)$ ainsi obtenue est bien évidemment fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{2q}$, t et z et fonction méromorphe de z : on l'obtient comme quotient de deux fonctions entières en z.

13. La solution fondamentale étant ainsi déterminée il est aisé d'appliquer aux équations (A) ou (A_1) l'analyse de Green.

De l'équation (A′) on déduit

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_i \frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \cos n x_i \, d\sigma$$
$$= -2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2.4\ldots 2q} F(t),$$

en supposant le pôle $a_1, a_2, \ldots, a_{2q}$ de la solution fondamentale intérieur au domaine σ. Cette formule est valable si l'on prend pour $V(t)$ la solution méromorphe de l'équation (16) pour toute valeur de z qui n'annule pas le déterminant de cette équation.

En prenant alors $v = V$ dans la formule (B), excluant le pôle $a_1, a_2, \ldots, a_{2q}$ par une petite sphère qu'on fait tendre vers zéro, on obtient à la limite

$$K_\sigma | [u, V] | = 2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2.4\ldots 2q} \int_0^1 F(t)\, u_0(t)\, dt,$$

où $u(t)$ désigne la valeur de $u(x_1, x_2, \ldots, x_{2q} | t)$ au pôle. $F(t)$ étant une fonction arbitraire, cette formule détermine immédiatement $u_0(t)$ [1].

---

[1] On peut employer, dans les cas où p est impair, une combinaison de la méthode que nous venons de donner avec celle que nous avons exposée dans le Chapitre précédent, n° 4. *Cf.* VOLTERRA, *Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti* (*Lincei Rend.*, 2e semestre 1913).



CHAPITRE XIV.

L'APPLICATION DU CALCUL AUX PHÉNOMÈNES D'HÉRÉDITÉ.

1. Introduction. — 2. Développement de la Mécanique classique. — 3. Développement de la Physique mathématique classique. — 4. Mécanique et Physique héréditaire. — 5. Objections à la Mécanique et à la Physique héréditaire. — 6. Les méthodes analytiques qui s'appliquent à l'étude de l'hérédité. — 7. Applications de la théorie de l'hérédité. — 8. Conclusions.

1. Dans les Chapitres précédents j'ai parlé de l'hérédité et, particulièrement, j'ai traité avec quelque détail l'élasticité héréditaire. J'ai montré comment les problèmes qui se présentent dans cette étude doivent être traités par des méthodes nouvelles et nous amènent ainsi à développer toute une nouvelle analyse.

Mais j'ai laissé de côté jusqu'ici les considérations physiques qui en sont la base et je n'ai pas non plus marqué la place que la Mécanique héréditaire occupe dans la Mécanique générale. C'est ce qui me reste à faire dans ce Chapitre. En même temps je me trouverai avoir synthétisé et récapitulé, en les présentant peut-être de façon plus élémentaire, les théories sur l'hérédité que le lecteur a trouvé exposées dans plusieurs Chapitres de ce Livre.

2. L'histoire de la Mécanique nous présente un tableau d'ensemble d'un grand intérêt. Elle est importante en elle-même et aussi comme étude générale du développement de la pensée humaine. Les différentes branches des sciences ont pris souvent la Mécanique comme guide. Son exemple a été, dans bien des cas, la source de leurs meilleurs progrès et de leurs succès plus brillants. C'est pourquoi l'étude de l'évolution des principes fondamentaux de la Mécanique, des problèmes qui y ont été posés, des moyens employés pour les résoudre est des plus attrayantes et des plus utiles au point de vue philosophique.

Je suis tenté de suivre maintenant, comme je l'ai fait dans le premier Chapitre pour le Calcul infinitésimal, le développement

de la Mécanique classique depuis les premiers essais des anciens jusqu'à Lagrange. Mais plusieurs auteurs modernes ont traité ce sujet, et il me suffira de citer les travaux de M. Mach, de M. Picard, de M. Painlevé, de Vailati, de M. Duhem, etc.

Je ne parlerai donc pas du développement de la Mécanique classique. Je me bornerai à répéter, on l'a dit maintes fois, que l'on doit à Lagrange la formule qui en renferme tous les principes. Les problèmes de la Mécanique sont ainsi ramenés à un seul problème analytique qui s'exprime par certaines équations. Tout progrès dans leur résolution fait avancer les différentes branches de la Mécanique.

Ceux qui, après Lagrange, se sont occupés de la Mécanique analytique, ont expliqué, perfectionné et élargi sa pensée. Ils ont développé ses méthodes et ils en ont fait des applications. Telle a été l'œuvre de Hamilton, de Jacobi et de leurs continuateurs.

Puis à côté de la Mécanique analytique de Lagrange, d'autres mécaniques se sont développées. Elles ont été construites sous l'influence de nouvelles découvertes de la Physique.

C'est ainsi que Hertz a construit une mécanique en relation avec les idées de Maxwell et de Helmholtz où les forces sont remplacées par des liaisons et des masses cachées.

Plus récemment, une nouvelle mécanique, la mécanique du principe de relativité, est en train de se constituer. Les principes fondamentaux de masse, de temps, d'espace et leurs relations mutuelles y sont profondément modifiées. On cherche peu à peu à construire sur des bases nouvelles un ensemble logique et simple qui puisse expliquer les nouveaux faits découverts par l'expérience en faisant disparaître toute contradiction.

Enfin, il ne faut pas oublier les relations mutuelles qui existent entre la mécanique et l'énergétique. On a essayé de faire rentrer l'énergétique dans la mécanique. Il existe la tendance inverse de considérer la mécanique comme un chapitre de l'énergétique en élargissant le domaine de cette science. Un ensemble original d'idées de philosophie naturelle est sorti de ces recherches.

Mais, pour arriver à la mécanique héréditaire, nous n'aurons pas besoin d'étudier la mécanique de Hertz, celle du principe de relativité ou l'énergétique et nous pouvons revenir à la mécanique classique.

Laissons de côté la statique qui est une science à part que les anciens connaissaient et occupons-nous de la dynamique. C'est d'Alembert qui en a établi et énoncé le principe fondamental. Les conceptions d'accélération, de force, de masse et de liaisons en dominent tous les développements.

Les trois premières sont suffisantes pour établir la mécanique des systèmes libres. Les principes qui règlent l'action des liaisons sont au contraire nécessaires pour fixer les lois du mouvement des systèmes qui ne sont pas libres.

Pour fixer les idées prenons, comme problème typique des systèmes libres, celui de la Mécanique céleste. La loi de Newton donne la force qui sollicite chaque point. L'accélération de chaque point est par suite déterminée à tout instant en fonction de sa position relativement aux autres points.

Envisageons comme problème typique des systèmes à liaisons celui du mouvement d'un corps rigide. Dans ce cas, aux forces appliquées on doit ajouter des forces, deux à deux égales et contraires, qui obligent les points du système à conserver des distances constantes entre eux.

Donc, à chaque instant, l'accélération de tout point dépend de la force qui lui est appliquée et des forces dont nous venons de parler dues aux liaisons. Elles sont inconnues et, en général, on ne peut pas les déterminer d'une manière complète, mais on peut les éliminer en tenant compte des conditions indépendantes qui expriment que les distances sont constantes.

Nous allons maintenant voir quels sont les moyens analytiques qu'il faut employer pour résoudre les différents problèmes qui se présentent ainsi.

Nous avons déjà touché dans le premier Chapitre aux rapports qui existent entre le Calcul infinitésimal et la Mécanique, et nous avons dit que Newton a intégré pour la première fois des équations différentielles lorsqu'il a cherché à déduire le mouvement des planètes de la loi qu'il avait établie. Les équations différentielles qu'il a envisagées sont des *équations différentielles ordinaires*. La détermination du mouvement et l'intégration de ces équations ne forment qu'un seul problème, et depuis l'époque de Newton jusqu'à présent tout problème dynamique n'est qu'un problème de cette nature : les progrès de la mécanique

et de la théorie des équations différentielles ont été simultanés.

Mais arrêtons-nous un instant et remarquons que dans ce que nous venons de dire, est contenu un principe du plus grand intérêt. Pour que le mouvement soit déterminé complètement dans tout le temps futur, il suffit de connaître la configuration actuelle du système et ses vitesses actuelles, c'est-à-dire qu'on peut prévoir tout ce qui aura lieu dans l'avenir du système dès qu'on se donne son état actuel. C'est ainsi qu'en Astronomie on calcule la position future des astres si l'on connaît leur configuration et leurs mouvements actuels.

3. Nous avons parlé jusqu'ici de la Mécanique, passons maintenant à la Physique mathématique.

Pour trouver les premiers essais vraiment utiles et féconds, il faut arriver à une époque relativement récente. Ce sont Laplace, Ampère, Gauss, Fourier, Cauchy, Poisson, Green, Maxwell, qu'il faut citer comme les fondateurs de la Physique mathématique.

Les théories de la propagation de la chaleur, de l'élasticité, de l'optique, de l'électrodynamique, furent bâties en prenant comme modèle et comme guide les théories de la Mécanique.

Mais les équations différentielles ordinaires ne furent plus suffisantes et il fallut se servir des équations aux dérivées partielles.

Nous allons en voir la raison. Revenons, en effet, à un point que nous avons effleuré légèrement dans le premier Chapitre ([1]). Pour traiter les problèmes de la Physique mathématique on suppose que le siège des phénomènes soit un continu. Mais il faut regarder cette hypothèse comme un artifice analytique, bien plus qu'une réalité, c'est-à-dire qu'il faut s'imaginer que les phénomènes se passent, au moins d'une manière approximative, comme si le milieu qu'on considère remplissait l'espace. C'est de cette manière qu'on doit comprendre l'esprit de cette hypothèse. Pour établir les relations fondamentales on peut alors procéder de deux manières différentes. On peut partir d'abord des hypothèses moléculaires et n'arriver au continu que par une méthode de type statistique. Mais on peut aussi partir directement du continu et imaginer que les éléments infiniment petits qui le constituent et qui sont contigus

([1]) Page 2.

exercent des actions réciproques selon des lois connues, ou que certains échanges aient lieu entre ces éléments.

De même, si le phénomène n'est pas statique, mais est variable avec le temps, il faut considérer ce qui se passe non seulement entre des éléments contigus de l'espace, mais encore entre des éléments contigus du temps.

C'est ainsi qu'on peut trouver les équations différentielles de la Physique mathématique. Elles sont aux dérivées partielles parce que les éléments qui individualisent les points de l'espace et le temps en constituent les variables indépendantes qui sont, par suite, au nombre de trois ou quatre.

Cette dernière méthode a été préférée et est employée par un grand nombre d'auteurs modernes.

Nous en avons donné dans ces Leçons un exemple lorsque nous avons rappelé de quelle manière on peut établir les équations générales de l'élasticité (¹). Souvenons-nous que tout milieu peut être décomposé en éléments infiniment petits et que la déformation de chaque élément dépend de six quantités, tandis que les lois de Cauchy sur la transmission des tensions entre éléments contigus montrent que l'état de tension dans chaque point dépend aussi de six quantités. Il suffira donc de relier ces douze quantités, déformations et tensions, par la loi de Hooke pour établir les équations de l'équilibre élastique. On passe aux équations du mouvement du milieu par le principe de d'Alembert.

On procède d'une manière analogue dans l'électrodynamique classique. Les lois de Maxwell amènent aux équations du champ électromagnétique (²). Elles relient d'un côté les variations de la polarisation électrique dans le temps, aux variations de la force magnétique dans l'espace et aux courants électriques. D'un autre côté elles rattachent les variations de la polarisation magnétique dans le temps à celles des forces électriques dans l'espace. Il n'y a maintenant qu'à fixer les relations qui existent entre la polarisation électrique et la force électrique ; la polarisation magnétique et la force magnétique. Si l'on établit que, à chaque instant, ces relations sont linéaires, on obtient des équations diffé-

---

(¹) Chapitre VI, nᵒˢ 1 à 4.
(²) Chapitre VII, n° 7.

rentielles analogues à celles des vibrations des corps élastiques.

Dans le cas de l'élasticité comme dans celui de l'électrodynamique, si l'on connaît à un instant donné l'état du système, tout l'état futur est complètement déterminé.

Il n'est pas nécessaire de multiplier les exemples. Dans la théorie de la chaleur, la question est posée de la même manière.

On peut examiner aussi des problèmes où il faut tenir compte en même temps des lois de l'élasticité, de celles de la propagation de la chaleur et de la thermodynamique.

C'est ce qui arrive dans les applications à bien des problèmes naturels. Bjerknes a remarqué ([1]), par exemple, que le problème général des mouvements de l'atmosphère est complètement déterminé de sorte que, au point de vue théorique, la question de la prévision du temps peut se poser d'une manière positive. Si l'on connaissait l'état de toute l'atmosphère à un instant donné et les actions extérieures, on pourrait déterminer l'état futur. Le problème météorologique se présente ainsi comme le problème astronomique.

Nous avons ainsi envisagé une classe étendue de phénomènes. Ce sont tous ceux qui rentrent dans la Mécanique et la Physique mathématique classique. Un seul instrument analytique est nécessaire pour les traiter, les équations différentielles, soit ordinaires, soit aux dérivées partielles, et ils obéissent tous au principe que l'état présent détermine les états à venir.

Nous laisserons de côté les questions de détail qui sont relatives à reconnaître la partie de l'espace où le futur est déterminé si l'état présent est connu dans une certaine région. C'est une question qu'on peut résoudre par la théorie des caractéristiques et de leurs enveloppes ([2]).

Le point sur lequel nous devons insister est que le principe que nous venons d'énoncer est une conséquence de la conception d'après

---

([1]) V. Bjerknes and J.-W. Sandström, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, première Partie. — V. Bjerknes, Th. Hesselberg and O. Devik, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, deuxième Partie. — *Publications of the Carnegie Institution of Washington.*

([2]) Volterra, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (*Acta mathematica*, t. XVIII). — Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* (Paris, 1903).

laquelle chaque action ne se manifeste que dans l'instant où elle agit, c'est-à-dire ne laisse pas un héritage dans le futur, ce qui revient à supposer que le système ne conserve pas la mémoire des actions qui l'ont sollicité dans le passé.

4. A ce moment, il faut se demander : est-ce ainsi que réellement les phénomènes naturels se produisent ? Cette hérédité et cette mémoire n'existent-elles pas effectivement ou les néglige-t-on pour simplifier l'étude des phénomènes ? Toutes les hypothèses précédentes ne seraient-elles que des hypothèses approximatives ? Il faut examiner les faits, rapprocher les résultats des observations et des expériences, et les assujettir à des discussions profondes.

Nous trouvons tout de suite une grande quantité de faits qui paraissent complètement en dehors des théories dont nous nous sommes occupés. Ces faits se sont manifestés d'abord dans des cas pratiques, en dehors même des conditions expérimentales des laboratoires. Ce n'est que plus tard qu'ils ont fait l'objet de recherches scientifiques et systématiques.

Tous les ingénieurs savent qu'un pont qu'on a construit depuis longtemps ne se déforme pas aujourd'hui sous l'action d'une charge de la même manière qu'il se déformait quelques jours après qu'il avait été bâti.

Si l'on assujettit un bout d'une barre élastique horizontale fixée à l'autre bout à des charges qui vont d'abord en croissant et que l'on diminue ensuite peu à peu, le corps ne prend pas, pendant qu'on décharge, les mêmes déformations qu'il avait pendant qu'on le chargeait : à un même poids flecteur ne correspond pas la même flexion [1]. Donc la déformation actuelle ne dépend pas seulement de la charge actuelle, mais aussi de toutes les charges précédentes. Il semble donc qu'on puisse énoncer le principe que toute action qui s'est exercée a laissé un souvenir dans le corps qui garde ainsi la mémoire de toutes les charges qu'il a supportées.

En Magnétisme nous pourrons citer aussi les phénomènes d'*hystérésis* et de *traînage :* ils ont été soumis à bien des études, parce qu'ils ont un intérêt très grand dans l'électrotechnique.

Pour distinguer les phénomènes dans lesquels on néglige cette

---

[1] *Cf.* CANTONE, *Influenza dei processi di deformazione sulle proprietà elastiche dei corpi* (*Nuovo Cimento*, 1894-1895).

action héréditaire, on pourra les faire rentrer, en adoptant une expression de M. Picard, dans la *Mécanique* et dans la *Physique non héréditaire*, et réunir tous les autres dans la *Mécanique* et dans la *Physique héréditaire* (1).

5. Mais avant de poursuivre, il est nécessaire d'examiner une objection fondamentale qui semble, au premier abord, détourner de ces recherches.

Dans un article publié dans le beau recueil de la *Nouvelle collection scientifique* sur les *Méthodes dans les sciences*, M. Painlevé s'est occupé des méthodes de la Mécanique et a dit quelques mots de l'influence du passé sur l'avenir des systèmes matériels (2).

M. Painlevé remarque que l'état d'un corps matériel à un instant donné dépend évidemment des circonstances antérieures qu'il a traversées. Mais pour prévoir ses états ultérieurs, il suffit de connaître ses conditions initiales à l'instant considéré, sans savoir comment il a été amené à cet état.

« Toutefois, dans beaucoup d'applications, et notamment quand l'état moléculaire des corps du système intervient d'une façon appréciable dans les phénomènes, il peut être très difficile, il peut même être impossible encore à notre technique expérimentale, de déterminer directement avec une précision suffisante les conditions initiales d'un système.

» Considérons, par exemple, deux clous sortis identiques de la même fabrique, mais dont l'un a été martelé à plusieurs reprises, tandis que l'autre restait dans un tiroir. Le premier clou n'est pas dans le même état moléculaire que le second, il a subi des déformations permanentes ; une étude microscopique suffisamment précise nous le montrerait. Mais si nous ne possédons pas de microscope assez puissant, les deux clous nous sembleront identiques ; nous serons incapables de discerner les différences de leur état moléculaire actuel. Qu'on nous dise alors que le premier clou a été martelé et comment il l'a été : nous serons avertis du genre de déformation qu'il a subi ; la connaissance du passé du clou supplée provisoirement à l'absence du microscope.

» L'histoire d'un corps vient en aide à l'impuissance actuelle de

(1) *Cf.* Chapitre I, page 14.
(2) Première série, 2e édition, Paris, 1910, pages 114-115.

notre technique, on supprime les complications que cette technique entraînerait. C'est là un stade nécessaire de l'étude moléculaire des corps, mais ce n'est qu'un stade, et il faut se garder de tirer d'une méthode transitoire des conclusions aussi aventureuses qu'injustifiées, et notamment de l'opposer à la doctrine copernicienne. »

Il existe donc un courant d'idées selon lesquelles la Mécanique et la Physique héréditaire n'existeraient pas d'une manière absolue puisqu'on pose comme un postulat que les états futurs d'un système quelconque dépendent uniquement de l'état actuel du même système.

M. Painlevé et bien d'autres ont une répugnance à admettre qu'une action puisse avoir un effet héréditaire, c'est-à-dire un effet qui se manifeste après que l'action s'est exercée. Mais faut-il en tirer la conséquence qu'on doit abandonner tout concept héréditaire et toute l'analyse qui s'y rapporte? Faut-il essayer d'étudier par d'autres voies les problèmes dont je viens de parler? Je crois que non, et je crois que ce serait méconnaître la pensée de M. Painlevé que d'en tirer cette conséquence. Au contraire, je pense qu'il est raisonnable d'admettre les procédés de l'hérédité comme les seuls possibles, au moins dans le moment actuel de la science, pour embrasser les phénomènes dont nous avons parlé. Il peut y avoir des divergences de principe, mais je crois que tous doivent être d'accord sur le terrain pratique et sur les méthodes qu'il faut suivre.

Il est utile de se rappeler à ce propos une idée de Newton, c'est-à-dire du philosophe et du mathématicien qui a été le premier à traiter d'une manière systématique et analytique les actions à distance. Il a avoué [1] qu'il avait une répugnance extrême à admettre qu'un corps peut agir où il n'est pas. Ainsi Newton trouvait, au point de vue philosophique, une difficulté fonda-

[1] *Opera quæ exstant omnia.* Comm. illustr. S. Horsley, Londini, 1779-85. Vol. IV. — *Lettres au docteur Bentley*, pages 429-442. (Newton à Bentley, Letter III, Cambridge, Feb. 25, 1693.) « That gravity should be innate, inherent and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of any thing else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it. »

mentale à accueillir la conception des forces à distance qui est la base de ses travaux. Cependant il l'a introduite dans la philosophie naturelle et, après lui, personne n'a pu s'en passer. Les résultats qu'on en a déduits ont été toujours vérifiés par l'observation et par l'expérience.

Remplacez maintenant l'idée d'espace par celle de temps, et vous pourrez répéter à peu près pour les forces qui s'exercent à distance dans le temps ce qu'on dit pour les forces qui s'exercent à distance dans l'espace. On peut éprouver pour les unes et pour les autres une égale répugnance, mais je crois que les unes et les autres sont également utiles.

Dans l'instant actuel, où les conceptions d'espace et de temps vont toujours plus s'entrelaçant, la comparaison que je viens de faire me semble assez frappante. Elle montre la liaison que, à mon avis, on pourrait établir entre les actions héréditaires et les forces à distance, qui, au premier abord, semblent ne pas présenter de rapports. On pourrait même développer cette idée en prenant pour guide des concepts récents.

Je dois ajouter qu'on a cherché de tous temps à substituer aux forces à distance des actions entre éléments contigus à l'espace. Les recherches classiques de Maxwell ([1]) qui a cherché à expliquer les forces newtoniennes par des tensions et des pressions dans un milieu sont bien connues, mais on sait aussi à quelles difficultés on s'est heurté quand on a voulu aller jusqu'au bout dans l'explication. Je n'ai pas besoin de rappeler à ce propos les belles études de Beltrami ([2]) et de M. Brillouin ([3]). Mais quoique la question ait été étudiée sous bien des rapports, personne ne s'est avisé jusqu'ici de traiter un problème de Mécanique céleste par les actions de Maxwell ou par d'autres d'une nature analogue.

De même je crois qu'à l'heure actuelle les phénomènes dont j'ai parlé plus haut ne pourraient s'envisager si l'on ne faisait usage de

---

([1]) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit par G. Séligmann-Lui, t. I, Chap. V, Paris, 1885.

([2]) Beltrami, *Sull' interpretazione mecanica delle formule di Maxwell* (Académie de Bologne : *Mémoires*, t. VII, 1886).

([3]) Brillouin, *Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1887).

l'analyse qu'il faut créer pour approfondir les actions héréditaires au point de vue mathématique.

Et si l'on cherche à abandonner les méthodes héréditaires, bien des difficultés se présentent. Prenons une particule M d'un corps. Toutes les actions qu'elle a subies en déterminent l'état actuel, de sorte que le futur dépend de tout le passé. C'est l'hypothèse héréditaire. Sera-t-il possible de remplacer la connaissance de toutes les actions auxquelles elle a été assujettie par la connaissance des valeurs d'un nombre fini de paramètres; un nombre fini d'éléments sera-t-il suffisant pour individualiser l'état présent de la particule? Ne sera-t-il pas nécessaire, pour connaître d'une manière complète son état actuel (comme on le connaît lorsqu'on se donne toutes les actions passées), de déterminer un nombre infini de paramètres?

Dans la théorie de la chaleur, par exemple, on peut remplacer la connaissance au contour de toutes les températures passées par celle de la température actuelle des différents points. Ce n'est qu'un passage d'un nombre infini d'éléments qui caractérisent un certain état à une autre infinité d'éléments qui définissent le même état [1].

Si quelque chose d'analogue se présente pour chaque particule M du corps que nous avons envisagé tout à l'heure, on parviendrait, soit par la méthode héréditaire, soit en voulant l'éliminer, à des quantités qui dépendent d'un nombre infini de variables. Aura-t-on alors avantage à abandonner la méthode héréditaire?

---

[1] Si l'on caractérise l'état du corps par les températures passées au contour, il faut connaître une fonction de trois variables : le temps et deux paramètres qui individualisent les points du contour. Si l'on caractérise l'état du corps par les températures actuelles des différents points, il est évident qu'il faut aussi connaître une fonction de trois variables. L'interprétation caractéristique de l'état du corps est changée, mais la nature de l'élément qui le caractérise est resté la même, c'est toujours une fonction de trois variables. Supposons que deux dimensions du corps soient négligeables par rapport à la troisième, le corps se réduisant à une ligne dont le premier bout est à une température constante, tandis que le deuxième bout à une température variable. Alors l'état actuel peut être défini, soit par la fonction du temps qui exprime toutes les températures passées du deuxième bout, soit par toutes les températures actuelles des points de la ligne.

Des exemples de ce genre sont très communs dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Les intégrales peuvent être individualisées indifféremment par toutes les valeurs de certaines fonctions arbitraires, ou par toutes les valeurs d'autres fonctions arbitraires.

Sera-t-il possible de renoncer aux procédés analytiques propres à cette méthode ([1])?

Les considérations précédentes amènent à poser bien des questions. Elles sont loin d'être résolues, et nous serions entraînés trop loin à vouloir les approfondir.

Il est possible qu'on puisse un jour se passer des actions héréditaires comme il est possible qu'on puisse se passer des forces newtoniennes, mais on peut attendre avant de se prononcer, même si l'on est guidé par des intuitions tout à fait légitimes.

Qu'il me soit permis à ce propos de rappeler, comme simple souvenir, un fait historique célèbre. Galilée et bien des savants de son époque combattaient les actions à distance. C'étaient ce qu'on appelait alors d'une manière vague les *influences occultes*. Entre autres, on avait de la répugnance à admettre l'influence de la Lune sur les marées, qui pourtant, depuis l'époque de Pline et au moyen âge, était un fait souvent reconnu. C'est pour trancher la question contre ces forces occultes que Galilée est tombé dans une erreur bien connue sur la théorie de la marée, et ce n'est qu'avec Képler et Newton que la question a été remise dans sa vraie voie.

6. Comment, maintenant, l'analyse pourra-t-elle s'appliquer à l'étude des phénomènes héréditaires?

Je renvoie pour cette question à ce qui a été dit dans les Chapitres précédents. Pour simplifier je n'envisagerai pas ici la question générale, mais un cas élémentaire très facile à aborder où des considérations géométriques élémentaires suffisent.

Considérons la torsion d'un fil. Soit ω l'angle de torsion et soit M le moment de torsion. Dans la théorie ordinaire de l'élasticité on part de l'hypothèse que ω est proportionnel à M et l'on écrit

$$\omega = KM, \tag{1}$$

([1]) Remarquons que des phénomènes qui ne sont pas de nature héréditaire, dont les lois s'expriment moyennant des équations différentielles, par exemple la propagation de la chaleur, peuvent amener à des questions qui se posent sous une forme héréditaire et qui se résolvent par les procédés de l'hérédité. C'est ainsi que la relation existant à chaque instant entre le niveau du mercure d'un thermomètre et la température variable du réservoir est donnée par une équation intégrale analogue à celle que nous allons trouver entre la torsion et le moment de torsion dans le cas de l'hérédité.

où K est un coefficient constant. On établit ainsi à chaque instant une relation entre la torsion et l'action extérieure. Si l'on écrivait en général

$$\omega = F(M),$$

où F est le symbole d'une fonction, on pourrait déterminer F de manière à s'approcher davantage du phénomène.

En supposant par exemple la fonction développable en série de puissances, on trouverait

$$\omega = KM + K_1 M^2 + K_2 M^3 + \ldots.$$

Mais de cette manière on négligera toujours les phénomènes héréditaires parce que, quelle que soit la fonction F, elle établira toujours une dépendance entre la torsion actuelle ω et l'action actuelle M. Les actions précédentes ne joueront aucun rôle.

Si l'on veut donc que ω dépende de toute l'histoire précédente du moment de torsion M il faut corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = KM + \Phi,$$

où Φ est une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par M depuis les temps les plus éloignés jusqu'à l'instant actuel t. Si nous pouvons négliger les actions qui ont précédé un certain instant t_0, Φ sera une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par M depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t. Supposons que le temps soit l'abscisse et M l'ordonnée; la fonction M sera représentée par une courbe du plan des (M, t) et Φ dépendra de la forme de cette courbe.

On peut maintenant, en première approximation, admettre que Φ dépende de M par une relation linéaire : c'est faire une hypothèse analogue à celle qui fut faite plus haut quand on a admis que F était une fonction de premier degré de M. Au point de vue physique cela revient à supposer que les effets de la superposition des moments de torsion, dans les temps passés, se somment; nous avons dit alors ([1]) que l'hérédité est linéaire.

Dans ce cas imaginons qu'un moment de torsion égal à l'unité soit appliqué au fil dans l'intervalle de temps infiniment petit $d\tau$ compris entre deux instants τ, $\tau + d\tau$ infiniment voisins. Il pro-

([1]) *Cf.* Chapitre VII.

duira une torsion actuelle dans le fil. Mais, puisque l'action est aussi héréditaire, il restera un résidu de cette action au temps t.

Désignons ce résidu par $\varphi(t, \tau)\,d\tau$.

Alors au temps t la torsion $\omega(t)$ sera donnée par $\mathrm{KM}(t)$ plus la somme de tous les résidus

$$\varphi(t, \tau)\,\mathrm{M}(\tau)\,d\tau$$

dus aux actions précédentes, c'est-à-dire à l'hérédité. La relation qui en résulte est donc l'équation intégrale

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t, \tau)\,\mathrm{M}(\tau)\,d\tau,$$

où la fonction $\varphi(t, \tau)$ est le *coefficient d'hérédité*.

Dès qu'on a posé les principes précédents, bien des questions se présentent.

On peut d'abord se demander : le coefficient d'hérédité étant connu, peut-on déterminer les moments de torsion qui ont été appliqués lorsqu'on connaît les torsions successives ?

Comment peut-on déterminer le coefficient d'hérédité s'il est inconnu ?

La première question se ramène à la résolution d'une équation intégrale linéaire. Si l'on peut négliger l'hérédité antérieure à un certain instant, tout revient à résoudre par rapport à $\mathrm{M}(t)$ l'équation intégrale

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{0}^{t} \varphi(t, \tau)\,\mathrm{M}(\tau)\,d\tau:$$

c'est un problème qui a été traité en détail au Chapitre IV [1].

Pour répondre à la seconde question, c'est-à-dire pour déterminer le coefficient d'hérédité, il faut faire appel à des données de l'expérience.

Nous rappellerons à ce propos un postulat et un principe général auxquels *tous les phénomènes d'hérédité sont assujettis* [2]. Le postulat est celui de la dissipation de l'action héréditaire d'après lequel *toute action héréditaire s'évanouit indéfiniment avec le temps;* le principe est celui du cycle fermé : *si à toute action*

---

[1] N°s 4-6.

[2] *Cf.* Chapitre VII.

périodique correspond un effet périodique ayant la même période, les lois de l'hérédité ne changent pas avec le temps et réciproquement. Transportons ces deux principes au cas de la torsion avec hérédité linéaire ; supposons que le moment de torsion varie d'une manière périodique depuis un temps très reculé et cherchons la condition pour que l'angle de torsion varie aussi périodiquement avec la même période. Le calcul montre que le coefficient d'hérédité ne doit dépendre que du temps qui s'est écoulé depuis que l'action s'est exercée, jusqu'à l'instant où l'on mesure l'héritage qu'elle a laissé. Donc le coefficient d'hérédité ne doit dépendre que de la différence $t-\tau$ et réciproquement.

Or, en nature, les faits se présentent de cette manière et la détermination du coefficient d'hérédité en est très simplifiée. On peut l'obtenir en connaissant les lois de variation de l'angle et du moment de torsion. Il suffit de résoudre une équation intégrale du même type que celle qu'on vient d'envisager. L'équation

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\mathrm{M}(\tau)\,d\tau$$

s'écrit en effet, en posant $t-\tau=\sigma$,

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_0^t \varphi(\sigma)\,\mathrm{M}(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Si nous supposons que

$$\mathrm{M}(t),\quad \frac{d\mathrm{M}(t)}{dt},\quad \frac{d^2\mathrm{M}(t)}{dt^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1}\mathrm{M}(t)}{dt^{n-1}}$$

soient nulles pour $t=0$, tandis que $\dfrac{d^n\mathrm{M}(t)}{dt^n}$ est différente de zéro, il viendra

$$(2)\qquad \omega^{(n)}(t) = \mathrm{KM}^{(n)}(t) + \int_0^t \varphi(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n)}(t-\sigma)\,d\sigma,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K} = \frac{\omega^{(n)}(0)}{\mathrm{M}^{(n)}(0)}.$$

En dérivant l'équation (2) on trouvera l'équation intégrale

$$\omega^{(n+1)}(t) + \mathrm{KM}^{(n+1)}(t) = \mathrm{M}^{(n)}(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n+1)}(t-\sigma)\,d\sigma,$$

pour déterminer $\varphi(t)$ en fonction de $\omega(t)$ et de $M(t)$ [1].

Le problème que nous avons envisagé jusqu'ici est un problème de statique. Il n'est pas difficile de traiter le problème dynamique correspondant des oscillations du fil : il suffit d'employer le principe de d'Alembert qui nous fait passer du cas statique au cas dynamique en remplaçant le moment de torsion par la différence entre ce moment et l'accélération de torsion multipliée par une constante.

L'équation qu'on trouve cesse alors d'être une équation intégrale. Elle devient une équation intégro-différentielle. Elle a la forme

$$\omega(t) = K\left[M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right] + \int_0^t \left[M(\tau) - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2}\right] \varphi(t, \tau)\, d\tau \ [2].$$

On obtient ainsi une nouvelle méthode pour déterminer le coefficient d'hérédité : il suffit d'envisager dans cette équation le coefficient d'hérédité comme inconnu et de supposer que la loi d'oscillation a été déterminée par l'observation directe. On trouve une équation intégrale, d'où l'on tire le coefficient cherché.

Nous avons donc deux procédés pour connaître le coefficient d'hérédité : la méthode statique, que nous avons considérée tout à l'heure, et cette méthode dynamique. Celle-ci est la plus intéressante au point de vue pratique.

Ce que nous avons dit pour la torsion d'un fil peut être répété pour la flexion et la vibration d'une barre, mais, au lieu d'une équation intégro-différentielle du second ordre, on trouve une équation du quatrième ordre [3]. Ce dernier cas a été récemment soumis à des recherches expérimentales directes dont nous aurons à parler.

Si nous passons au cas général d'un corps élastique quelconque l'analyse devient plus compliquée, car le cas statique même sort de l'analyse des équations intégrales pour entrer dans celle des équations intégro-différentielles. Cette étude a été le sujet de plusieurs Chapitres précédents et je n'y reviendrai pas.

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (*Acta mathematica*, t. XXXV, p. 324).

(2) Cf. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 139.

(3) Nous avons écrit cette équation au Chapitre VI, n° 9 [équation (12)]. Au même endroit nous avons donné un exemple de détermination d'un coefficient d'hérédité par la méthode dynamique.

C'est ainsi, par exemple, que le problème général de la sphère élastique a été résolu assez facilement dans le cas où l'hérédité entre en jeu. La solution est prête aux applications qu'on ne peut pas manquer de faire aux problèmes de la rotation de la Terre ([1]).

Je tiens seulement à remarquer que le principe du cycle fermé joue dans toutes ces considérations un rôle très important. En effet, grâce à ce principe, on peut démontrer que les coefficients d'hérédité forment un groupe de fonctions permutables. On peut alors employer la théorie de la permutabilité pour résoudre tous les problèmes correspondants ; cette théorie simplifie notablement les solutions et permet de les exprimer par des séries très rapidement convergentes qu'on peut employer facilement dans la pratique.

Pour étudier l'électromagnétisme héréditaire il n'y a qu'à développer une analyse tout à fait analogue. On trouve ainsi des équations intégro-différentielles du même type que les précédentes. On peut les traiter par les mêmes procédés ([2]).

7. Je ne puis terminer sans dire quelques mots des applications expérimentales de la théorie que je viens d'exposer.

Un physicien américain très distingué, M. Webster, en a fait des applications aux théories acoustiques. Je désire même insister sur la partie la plus pratique de l'ensemble de ses recherches. Il s'est proposé, par exemple, de résoudre cette question très intéressante : Quelle est la meilleure matière pour la construction des diapasons ? La littérature scientifique, de l'avis de M. Webster, ne donne pas encore une réponse satisfaisante à cette question. Une grande partie de l'énergie de vibration des diapasons n'est pas employée pour l'émission du son, elle est dissipée dans la substance même du corps vibrant. Cette énergie dissipée est plus grande qu'on ne le pense ordinairement.

MM. Webster et Porter ont cherché d'abord à donner les lois de cette dissipation.

Plusieurs théories se présentaient : celle de la viscosité, qui a été exposée par M. Voigt dans son traité sur la physique des cristaux, et la théorie héréditaire.

([1]) *Cf.* Chapitre IX, n° 17.
([2]) *Cf.* Chapitre VII, n° 11.

La méthode expérimentale que les deux physiciens ont adoptée consistait à étudier l'amortissement des vibrations transversales d'une barre exécutant des vibrations normales. Chaque vibration normale a un décrément différent qu'on mesure par des procédés photographiques. Les vibrations sont provoquées par des électro-aimants.

La barre est soutenue dans le vide par des supports non dissipatifs qui sont placés, avec toute l'exactitude possible, aux nœuds du corps vibrant.

On a fait usage d'une barre d'acier, d'une barre de bronze et d'un plateau de verre. Chacun de ces corps vibrait de trois manières différentes avec deux, trois et quatre nœuds. L'amortissement croît avec le nombre des vibrations, mais il ne croît pas proportionnellement. Il semble s'approcher d'une limite.

Si l'on applique la théorie de la viscosité on trouve que les décréments doivent être proportionnels au carré de la fréquence. Cette relation n'est nullement vérifiée par les expériences de MM. Webster et Porter ; c'est pourquoi ils ont dû abandonner la théorie de la viscosité et ils ont employé celle de l'hérédité.

Comme nous l'avons dit précédemment, la théorie des vibrations transversales d'une barre élastique amène, si l'on tient compte de l'hérédité, à une équation intégro-différentielle du quatrième ordre. C'est cette équation que MM. Webster et Porter ont employée et les résultats expérimentaux qu'ils ont trouvés jusqu'ici correspondent à la théorie.

Ils ont déterminé ce qu'on peut appeler *la mémoire des substances* avec lesquelles ils ont expérimenté. Il paraît que l'acier a une mémoire très faible.

8. Je crois avoir assez démontré que les théories héréditaires, au moins celles dont j'ai parlé, peuvent être étudiées par les méthodes des équations intégro-différentielles. On peut ainsi développer l'étude théorique de l'hérédité sans faire aucune hypothèse particulière sur les fonctions qui la caractérisent, c'est-à-dire les coefficients d'hérédité.

Dans les questions de Physique mathématique et de Mécanique, il est utile de laisser, autant qu'il est possible, indéterminées les constantes et de ne les fixer numériquement qu'au dernier moment,

lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes. C'est à cause de cela que l'importance de l'application de l'algèbre aux questions naturelles a toujours grandi. Il y a la même utilité et le même avantage à pouvoir laisser indéterminées les lois spéciales par lesquelles l'hérédité se manifeste, en résolvant les questions correspondantes avec la plus grande généralité possible. On détermine ensuite les coefficients d'hérédité par la comparaison des formules générales avec les résultats de l'observation et on les fixe ainsi dans les cas particuliers qui se présentent.

Les considérations précédentes auront peut-être montré le caractère essentiel et l'utilité des méthodes qui se rattachent à la conception des fonctions qui dépendent d'autres fonctions : de ces méthodes découlent les procédés employés pour résoudre les équations intégrales et intégro-différentielles. Faute de ces derniers procédés, des développements analytiques pour l'hérédité ne seraient pas possibles, et il faudrait s'arrêter aux premiers pas dans toutes les applications.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

L'ÉVOLUTION DES IDÉES FONDAMENTALES DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE LIGNE. EXEMPLES.

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DES FONCTIONS DE LIGNES ET LE CALCUL DES VARIATIONS.

CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS DE LIGNES IMPLICITES.

CHAPITRE V.

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU TYPE ELLIPTIQUE.

CHAPITRE VI.

LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉLASTICITÉ.

CHAPITRE VII.

LA CONDITION DU CYCLE FERMÉ.

CHAPITRE VIII.

LE PROBLÈME DE LA SPHÈRE ÉLASTIQUE ISOTROPE AVEC HÉRÉDITÉ.

CHAPITRE IX.

LA COMPOSITION ET LA PERMUTABILITÉ DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE X.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE A LA SOLUTION DES EQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE XI.

ÉTUDE DES FONCTIONS PERMUTABLES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE XII.

LA PERMUTABILITÉ DE DEUXIÈME ESPÈCE.

CHAPITRE XIII.

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES A LIMITES FIXES.

CHAPITRE XIV.

L'APPLICATION DU CALCUL AUX PHÉNOMÈNES D'HÉRÉDITÉ.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

50995 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.